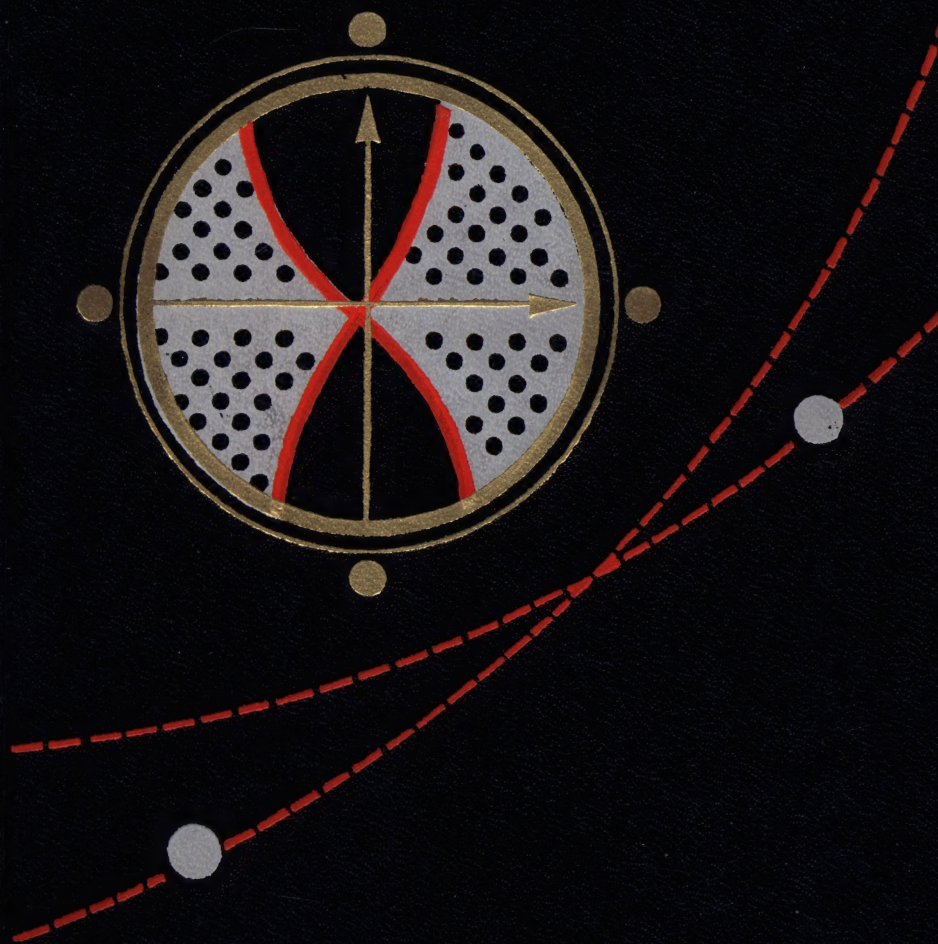


Д.И.Блохинцев

ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ В МИКРОМИРЕ



Д.И. Блохинцев

ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ В МИКРОМИРЕ

ИЗДАНИЕ 2-Е, ИСПРАВЛЕННОЕ



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1982

Блохинцев Д. И. Пространство и время в микромире. — 2-е изд., испр. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.

Монография посвящена критическому анализу пространственно-временного описания мира элементарных частиц. В ней высказывается мысль, что трудности современной теории связаны с неправильными геометрическими представлениями при описании взаимодействий элементарных частиц на малых расстояниях, дан подробный анализ этих трудностей и изложен ряд новых направлений, связанных с различными модификациями пространственно-временных соотношений.

Наряду с обычными геометрическими представлениями, выработанными классической наукой на основе анализа явлений в макромире, в этой книге с большой оригинальностью изложены вопросы, касающиеся описания различных геометрических соотношений в микромире: измерение координат и времени частиц в релятивистском и нерелятивистском случаях, локализация частиц, распространение сигналов в нелинейных теориях поля, квантование пространства — времени и т. д.

В монографии изложены вопросы, связанные с условиями микро- и макропричинности в квантовой теории поля. Здесь много интересных результатов, принадлежащих автору, например связь между нарушением причинности в малых пространственно-временных областях и наблюдаемыми процессами при рассеянии элементарных частиц. Большинство результатов, приведенных в книге, ранее почти не было опубликовано.

Книга рассчитана на студентов, аспирантов и научных работников, занимающихся теоретической физикой.

Рис. 52, табл. 4, библи. 147 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
Глава I. Геометрические измерения в макромире	9
§ 1. Арифметизация пространства—времени	9
§ 2. Физические методы арифметизации пространства—времени	11
§ 3. О делении многообразия событий на пространство и время	19
§ 4. Аффинное многообразие	27
§ 5. Риманово многообразие	32
§ 6. Физика арифметизации пространственно-временного многообразия	37
§ 7. Арифметизация событий в случае нелинейной теории поля	41
§ 8. Общая теория относительности и арифметизация пространства—времени	46
§ 9. Хроногеометрия	50
Глава II. Геометрические измерения в микромире	53
§ 10. Замечания об измерениях в микромире	53
§ 11. Измерение координаты микрочастицы	55
§ 12. Механика измерения координаты микрочастицы	62
§ 13. Косвенное измерение координаты микрочастицы в данный момент времени	73
Глава III. Геометрические измерения в микромире в релятивистском случае	78
§ 14. Фермионное поле	78
§ 15. Соотношение неопределенностей для фермионов	83
§ 16. Бозонное поле	86
§ 17. Локализация фотонов	91
§ 18. Расплывание релятивистских пакетов	95
§ 19. Координата Ньютона—Вигнера	98
§ 20. Измерение координат микрочастицы в релятивистском случае	101
Глава IV. Роль конечных размеров элементарных частиц	105
§ 21. Поляризация вакуума. Размер электрона	105
§ 22. Электромагнитная структура нуклонов	109
§ 23. Мезонная структура нуклонов	118
§ 24. Структура частиц в теории квантованных полей	123

Глава V. Причинность в квантовой теории	135
§ 25. Замечания о причинности в классической теории поля	135
§ 26. Причинность в квантовой теории поля	143
§ 27. Распространение сигнала «внутри» микрочастицы	151
§ 28. Условия микропричинности в квантовой теории поля	157
§ 29. Микропричинность в теории матрицы рассеяния	163
§ 30. Причинность и аналитические свойства матрицы рассеяния	169
Глава VI. Макроскопическая причинность	183
§ 31. Формальная теория \hat{S} -матрицы	183
§ 32. Пространственно-временное описание с помощью \hat{S} -матрицы	193
§ 33. Масштаб для асимптотического времени T	198
§ 34. Нестабильные частицы (резонансы)	202
§ 35. Условия макроскопической причинности для \hat{S} -матрицы	210
§ 36. Примеры акаузальных функций влияния	217
§ 37. Пример построения акаузальной матрицы рассеяния	222
§ 38. Дисперсионные соотношения для акаузальной \hat{S}_a -матрицы	231
Глава VII. Обобщение причинной связи и геометрии	236
§ 39. Две возможности обобщения	236
§ 40. Евклидова геометрия в микромире	244
§ 41. Стохастическая геометрия	250
§ 42. Дискретное пространство — время	256
§ 43. «Квазичастицы» и квантование пространства	263
§ 44. Флуктуации метрики	269
§ 45. Нелинейные поля и квантование пространства-времени	275
Глава VIII. Вопросы эксперимента	
§ 46. Заключительные замечания теоретического характера	283
§ 47. Экспериментальные следствия локальной акаузальности	284
§ 48. Экспериментальные следствия моделей с «внешним» вектором	294
Дополнения	299
Литература	341
Именной указатель	346
Предметный указатель	347

Посвящается
светлой памяти

ШИФРЫ ДРАБКИНОЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Путь к пониманию закономерностей, господствующих в мире элементарных частиц, еще не найден. Современный физик-теоретик принужден довольствоваться компромиссными концепциями, которые в лучшем случае обещают частный успех за счет общности и единства.

В этой ситуации критический анализ основных понятий современной квантовой теории может быть и своевременным, и полезным. Можно надеяться, что значение этого анализа сохранится даже и в том случае, если в скором времени будут открыты существенно новые пути к пониманию основ физики элементарных частиц. В настоящей монографии избран определенный аспект этого анализа — *проблемы геометрии в микромире*. Обсуждению этих проблем мы предпослали очерк, посвященный геометрическим измерениям в *макромире*, которые, по крайней мере в ограниченном круге задач, представляются достаточно ясными и могут служить в качестве исходных для обсуждения ситуации в микромире. Понятия и методы, пригодные в макромире, могут быть перенесены в микромир лишь *косвенно* и требуют большой степени абстракции.

Во многих важных случаях для осмысливания физического содержания той или иной динамической переменной, имеющей геометрическое значение, например пространственно-временных координат частицы x , y , z , t , необходимо прибегать к мысленным опытам, практическая осуществимость которых более чем сомнительна, но которые во всяком случае совместимы с основными принципами геометрии и квантовой механики.

Еще большая дистанция в пустынном море абстрактных построений отделяет макроскопические понятия пространства-времени от того способа употребления координат x , y , z , t , который принят в релятивистской квантовой теории поля.

В монографии показано, что наличие структуры у элементарных частиц ставит вообще под сомнение возможность [точного определения координат элементарной частицы x, y, z, t и еще в большей степени координат элементов, образующих эти частицы (если такие элементы существуют не только в воображении)]. Это важное обстоятельство обнаруживается на уровне анализа даже самых благоприятных мысленных экспериментов.

В этой связи возникает сомнение в логической законности употребления символов x, y, z, t в качестве пространственно-временных координат, пригодных для описания явлений внутри элементарных частиц. Это обстоятельство предоставляет теоретику определенную свободу в выборе пространственно-временных и причинных связей внутри элементарных частиц, иными словами, произвол в выборе *геометрии в малом*.

Последние главы книги посвящены описанию некоторых моделей, позволяющих иллюстрировать обрисованную выше ситуацию. В заключение обсуждаются экспериментальные данные и экспериментальные возможности, имеющие отношение к геометрическим проблемам и проблемам причинности в микромире.

Данная монография основана в значительной мере на работах автора, опубликованных в разное время и в различных изданиях. Многие из этих работ выполнены совместно с учениками. Автору было отрандно найти возможность осветить в монографии и некоторые оригинальные исследования своих учеников: Б. М. Барбашова (совместно с Н. А. Черниковым), Г. И. Колерова и Г. В. Ефимова. Автор глубоко признателен им за обсуждения, способствовавшие разъяснению многих неясных и спорных вопросов. Особенно признателен автор за полезные советы и замечания М. А. Маркову и Б. М. Барбашову, взявшим на себя труд критически прочесть рукопись книги, и Г. И. Колерову за существенную помощь в подготовке рукописи.

Хотелось бы надеяться, что идеи этого труда окажутся полезными для тех, кого волнуют фундаментальные проблемы современной атомной физики.

Защищаемое здесь истолкование Геометрии нельзя непосредственно применять к субмолекулярным (меньшим, чем молекулы) пространствам... может оказаться, что такое экстраполирование столь же неправильно, как и распространение понятия температуры на частицы тела молекулярных размеров^{*)}).

А. Эйнштейн

Современная философия рассматривает пространство и время как формы существования любого вида материи. Поэтому естественно считать, что закономерности геометрии являются самыми общими и простирают свою власть и значимость на любые *события* и явления в мире, который мы знаем.

Термин «событие» мы пока не будем уточнять, подразумевая под ним некоторое физическое явление, выражающееся в том или ином изменении состояния материи.

Со времени Эйнштейна и Минковского [2, 3] в геометрии объединяют рассмотрение пространства и времени, поэтому современная геометрия нераздельно включает в себя понятие движения. В сущности, это понятие, а вместе с ним и понятие времени неявно всегда фигурировали в геометрии: одна из основных операций евклидовой геометрии — совмещение геометрических фигур косвенно вводит в геометрию понятие перемещения в пространстве, т. е. движения.

В известной «Эрлангенской программе» [4] Ф. Клейн положил в основу геометрии групповой подход, который опять-таки можно рассматривать как косвенное введение в геометрию понятия движения.

Оставляя сейчас в стороне эти вопросы, мы можем в самом общем виде сказать, что предметом геометрии является *упорядочение событий*.

^{*)} См. [1].

Каждому событию мы намерены выдать паспорт, в котором было бы отмечено его «местожительство».

Объединенная геометрия пространства — времени позволяет рассматривать соседство событий не только в пространстве, но и во времени. Поэтому оказывается возможным положить в основу упорядочения событий *причинность*, т. е. форму *генетической связи* между событиями.

Наш современный опыт учит, что такая возможность действительно существует и основана на объективных закономерностях, свойственных нашему миру. Однако, строго говоря, мы не знаем, как далеко простирается эта возможность. Область очень больших масштабов — *космология* и область очень малых масштабов — *мир элементарных частиц* не настолько еще изучены, чтобы можно было высказать вполне определенные суждения о значимости причинности.

Мы привыкли считать x пространственной координатой, а t — временем и употребляем их в этом смысле даже внутри элементарных частиц. Однако что соответствует им в действительности?

Не должны ли пространственно-временные отношения радикально измениться в области столь малых масштабов, которые характерны для мира элементарных частиц?

Эта книга и будет посвящена анализу проблем пространства и времени, возникающих в микрокосмосе.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ
В МАКРОМИРЕ

§ 1. Арифметизация пространства — времени

Упорядочение событий предполагает возможным приписать каждому элементарному событию P определенные числа x_1, x_2, \dots, x_n — координаты этого события. Число необходимых координат n определяется числом измерений рассматриваемого пространственно-временного многообразия (например, физическое пространство четырехмерно: три координаты пространственные $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$, четвертая координата $x_4 = t$ — временная).

Совокупность этих n чисел $(x) \equiv x_1, x_2, \dots, x_n$ будет образовывать «паспорт» элементарного события.

При этом под элементарным событием P мы будем подразумевать такое событие, которому можно приписать только одну совокупность чисел (x) . Поэтому термины «элементарное событие P » и «точка P » в нашем пространстве — времени эквивалентны. Приписывание каждому событию координат мы будем называть *арифметизацией* точек пространства — времени (чтобы не сказать слово, мало популярное в науке: паспортизация точек пространства — времени). К процессу арифметизации точек пространства — времени должны быть предъявлены некоторые математические (логические) требования, например требование однозначного соответствия точек пространства — времени P координатам (x) ; кроме этого, должны быть указаны те физические методы, с помощью которых, по крайней мере в принципе, может быть осуществлена предполагаемая арифметизация. Иными словами, мы должны указать физические процессы, на которых могут быть основаны методы арифметизации.

Точки пустого пространства по самому смыслу термина «пустое» ничем не отличаются друг от друга*).

*) Мы сейчас не касаемся вопроса о том, можно ли считать реальное физическое пространство пустым.

Поэтому физически реальный способ различения точек пространства—времени может быть основан только на реальных событиях в этих точках. Иными словами, возможна арифметизация реальных событий, а не точек пространства—времени «самих по себе». Принимая эквивалентность элементарных событий и точек пространства—времени, мы с самого начала исключаем неопределенные операции с пустотой.

Таким образом, арифметизация точек пространства—времени должна основываться на возможности различения этих точек независимо от самой арифметизации; точка (\equiv элементарное событие) должна иметь индивидуальные признаки, характерные для осуществляющегося там события. В такой постановке проблемы арифметизация еще содержит очень большой произвол. Характер этого произвола может быть виден из следующего примера. Пусть рассматриваемое пространство заполнено материей, имеющей непрерывно меняющийся цвет.

Каждая точка P содержит определенную смесь синего и желтого цветов. Каждой комбинации цветов (поскольку цвет всех точек различен) мы могли бы сопоставить *любым образом* пару чисел x_1, x_2 , лишь бы множество чисел x_1 и x_2 было равномощно с множеством цветовых точек. Огромный произвол такого сопоставления виден из того, что мы могли бы при переходе к различным цветовым областям допускать любые скачки в значении пар чисел x_1, x_2 без того, чтобы нарушать однозначное соответствие чисел x_1, x_2 и цвета точки («элементарного события»).

Допустим теперь, что мы располагаем способом измерения цветовых концентраций синего и желтого цвета в любой точке. Тогда концентрация синего цвета a и концентрация желтого b могли бы быть взяты в качестве пар чисел (a, b) для арифметизации наших событий. Такая арифметизация отражала бы прямым образом структуру нашего многообразия—непрерывный характер изменения цвета точек. Выбор любой другой системы арифметизации такой, что $x_1 = X_1(a, b)$ и $x_2 = X_2(a, b)$ (предполагаем взаимную однозначность пар (x_1, x_2) и (a, b)), имел бы теперь уже твердое физическое обоснование в «предпочтительной», или «естественной», системе арифметизации (a, b) .

Эта «предпочтительность», или «естественность», базируется на существовании физического метода определения цветового состава «событий», не связанного первоначально с арифметизацией.

Выбирая другую систему арифметизации (x_1, x_2) , в частности скачкообразную, мы должны были бы, анализируя события в нашем цветовом пространстве, помнить, что скачки в системе паспортизации точек введены искусственно. Так, искусственно было бы, например, на одной и той же улице вводить несколько нумераций домов, из которых каждая не продолжает соседнюю, а является новой и произвольной.

Приведенный простой пример показывает, что способ арифметизации точек пространства—времени должен основываться на реальных процессах и наиболее прямым образом отображать объективную структуру пространства—времени. Арифметизация невозможна без привлечения материальных процессов. Поэтому невозможно и отделение физики от геометрии [5, 6].

§ 2. Физические методы арифметизации пространства — времени

В доэйнштейновский период теоретическая физика опиралась на геометрию Евклида и на представление о некотором абсолютном времени. Как абсолютное пространство Евклида, так и абсолютное время были сценой, на которой мог бы быть поставлен любой спектакль: идея о связи материальных явлений с геометрией пространства и времени в то время еще была чужда физикам.

Вот как И. Ньютон определял пространство и время в своих «Математических началах натуральной философии»: «Абсолютное, истинное и математическое время само по себе и в силу своей природы протекает равномерно и безотносительно к какому-нибудь другому объекту, и оно называется также длительностью... Абсолютное пространство по самой своей природе и безотносительно к какому-либо другому объекту остается всегда одинаковым и неподвижным...» [7].

В этих определениях подчеркивается полная независимость геометрии от физики.

Однако, как впервые было показано Г. Гельмгольцем [8], геометрия Евклида базируется на представлении о существовании твердых тел. На основании предположений:

I. Пространство n -измерений есть n -кратно протяженное многообразие $\mathfrak{R}_n(x)$, иными словами, каждый элемент многообразия (точка) определяется n непрерывно изменяющимися величинами — координатами элемента: x_1, x_2, \dots, x_n .

II. Допускается существование подвижных, но неизменяемых (твердых) тел или систем точек; между $2n$ координатами каждой пары точек, принадлежащих твердому телу, существует уравнение, не зависящее от движения твердого тела и одинаковое для всех взаимно совпадающих пар точек.

III. Допускается вполне свободная подвижность твердых тел (предполагается, что каждая точка может непрерывно перейти в другую, поскольку этому не препятствует связь, налагаемая пунктом II).

IV. Два совмещающихся тела совмещаются и после того, как одно из них подвергалось вращению около некоторой оси (однозначность).

Рассматривая эти положения для случая $n=3$ и допуская бесконечность пространства, Г. Гельмгольц показал, что величина

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 \quad (2.1)$$

остаётся неизменной при всех вращениях твердой системы около точки $dx_i = 0$. Поэтому эта величина и может быть принята за меру пространственного удаления — точек x_1, x_2, x_3 и $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3$ *).

В заключение своего исследования Г. Гельмгольц подчеркивает, «...что вся возможность системы наших пространственных измерений зависит, как показывает предыдущее изложение, от существования таких тел природы, которые достаточно близко подходят под наше понятие о твердых телах. Независимость совместимости

*) Результат Г. Гельмгольца ведет к римановскому мероопределению длины; ср. § 5.

от положения и направления совмещающихся форм и от пути, которым они приведены к совпадению, есть тот факт, на котором основывается возможность измерения пространства».

С современной точки зрения мы так резюмировали бы исследования Г. Гельмгольца: *геометрия Евклида основывается на группе движений твердого тела*. Эта группа является непрерывной шестипараметрической группой, включающей в себя операции вращения \hat{O}_3 и трансляции \hat{T}_3 .

Вместо движения твердого тела мы можем рассматривать преобразование точек самого евклидова многообразия

$$x' = Ax, \quad (2.2)$$

где A — некоторая линейная операция над координатами $x(x_1, x_2, x_3)$, оставляющая неизменными внутренние, геометрические отношения твердого тела и переводящая точку $P(x)$ многообразия $\mathfrak{H}(x)$ в точку $P(x')$ многообразия $\mathfrak{H}(x')$. Эта более широкая точка зрения позволяет ввести в рассмотрение не только непрерывные преобразования, соответствующие движению, но и дискретные преобразования координат. Таково, в частности, преобразование инверсии, меняющее знак координат \hat{P}

$$x' = -x. \quad (2.3)$$

Все указанные операции оставляют инвариантной фундаментальную форму:

$$L(x, x') = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2, \quad (2.4)$$

где (x_1, x_2, x_3) и (x'_1, x'_2, x'_3) суть координаты двух точек $P(x)$ и $P(x')$. Эта форма есть не что иное, как квадрат расстояния между точками $P(x)$ и $P(x')$.

В соответствии с изложенными идеями относительно существа геометрии Евклида мы видим, что в основу определения меры в этой геометрии может быть взят идеально жесткий масштаб, снабженный делениями. Этот древнейший способ измерения расстояний имеет немалое практическое значение и в наше время.

Арифметизация точек пространства может быть произведена теперь с помощью операции откладывания жесткого масштаба. Появление в том или ином месте кон-

ца или другого деления масштабного стержня само по себе есть материальное событие, и в этом случае процесс арифметизации точек пустого пространства сам собою сопровождается наполнением пространства материей. Точка пространства P с координатой x (мы будем часто обозначать такую точку символом $P(x)$) означает ту точку, которую занимает конец единичного жесткого масштаба l , если он отложен x раз.

Жесткость масштаба предполагает и его неизменность с течением времени. Поэтому, если повторить операцию откладывания жесткого стержня в более позднее время t , то, отложив его вновь x раз, мы, *по определению*, придем в *ту же точку* пространства $P(x)$.

Заметим, что существует изящная возможность проверить евклидов характер пространства n измерений, если обмерить с помощью жесткого масштаба n -мерный тетраэдр, натянутый на $(n+1)$ точек, являющихся его вершинами.

Возьмем одну из этих точек за начало координат, а координаты остальных точек обозначим через x_{α}^i , где $i = 1, 2, \dots, n$ — номера точек, $\alpha = 1, 2, \dots, n$ — номера координат. Объем такого тетраэдра V_n выражается формулой

$$V_n = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Заменяя здесь строки на столбцы и перемножая определители, получим

$$V_n^2 = \frac{1}{(n!)^2} \begin{vmatrix} (x^1 x^1) & (x^1 x^2) & \dots & (x^1 x^n) \\ (x^2 x^1) & (x^2 x^2) & \dots & (x^2 x^n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (x^n x^1) & (x^n x^2) & \dots & (x^n x^n) \end{vmatrix}. \quad (2.6)$$

Общий элемент этого детерминанта имеет вид

$$a_{ik} = \sum_{\alpha=1}^n x_{\alpha}^i x_{\alpha}^k \equiv x^i x^k = \frac{1}{2} [(x^i - x^k)^2 - (x^i)^2 - (x^k)^2]. \quad (2.7)$$

Иными словами, объем V_n есть функция только попарных расстояний между вершинами тетраэдра. Для n -мерного евклидова пространства $V_{n+1} = 0$; если бы для этого пространства оказалось $V_{n+1} \neq 0$, то это означало бы, что геометрия пространства неевклидова.

Для того чтобы произвести исчерпывающую арифметизацию событий, необходимо еще установить способ измерения времени. Наряду со стандартным стержнем-масштабом необходимо иметь и стандартные часы. К таким часам также предъявляется требование «жесткости», именно, требование постоянства их периода τ . Тогда промежуток времени t будет означать число отсчитанных периодов τ , которые мы можем считать единичными. Эта предполагаемая «жесткость» часов математически эквивалентна однородности времени.

Соответственно этой однородности времени, рассмотренная ранее группа преобразований в евклидовом пространстве должна быть дополнена операцией трансляции во времени \hat{T}_4 , оставляющей инвариантной длительность промежутка времени $t = t_2 - t_1$.

Таким образом, общее групповое преобразование, «характерное» для геометрии Евклида—Ньютона, может быть представлено в виде произведения операций:

$$\hat{g} = \hat{O}_3 \hat{T}_3 \hat{T}_4 \hat{P}. \quad (2.8)$$

Рассмотренные выше преобразования относятся к определенной системе отсчета. При этом под системой отсчета мы разумеем совокупность твердых тел и жестких часов, неподвижных относительно друг друга и служащих для арифметизации точек пространства и времени.

Можно вообразить себе и другую систему, движущуюся равномерно со скоростью v относительно первой. Для определенности будем считать, что эта скорость направлена по оси Ox . Тогда преобразование координат и времени гласит:

$$x'_1 = x_1 + vt, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad t' = t. \quad (2.9)$$

Это — *преобразование Галилея*. Строго говоря, оно уже выходит за пределы геометрии, оперирующей отдельно с пространством $\mathfrak{N}_3(x)$ и временем $\mathfrak{T}(t)$. Значение этого

преобразования вскрывается, если мы перейдем к механике.

Преобразование Галилея оставляет инвариантным ускорение, так как

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (2.10)$$

и, следовательно, основной закон механики — второй закон Ньютона остается неизменным. Эту неизменность выражает принцип относительности Галилея: *все механические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета.*

Объединим теперь формально пространство $\mathfrak{R}_3(x)$ и время $\mathfrak{T}(t)$ в одно общее многообразие $\mathfrak{R}_4(x, t)$. Обозначая операцию преобразования Галилея (2.9) через \hat{g}_3 , мы можем записать общую операцию в многообразии пространства — времени $\mathfrak{R}(x, t)$ в виде произведения операций:

$$\hat{g} = \hat{g}_3 \hat{O}_3 \hat{T}_3 \hat{T}_4. \quad (2.11)$$

Это — собственное преобразование Галилея. Оно может быть расширено до *несобственного* преобразования, если операцию \hat{g} расширить добавлением операции инверсии \hat{P} координат и операции обращения времени \hat{T} . Последняя операция означает замену

$$t' = -t. \quad (2.12)$$

Тогда общая операция несобственного преобразования Галилея запишется в виде

$$\hat{g}_n = \hat{g} \hat{P} \hat{T}. \quad (2.13)$$

В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний относительно выбора системы координат. Рассматривая геометрию Евклида, мы пользовались декартовой системой координат x_1, x_2, x_3 , в которой фундаментальная форма $L(x, x')$ имеет вид (2.4).

Далеко не в каждой системе координат внутренние свойства пространства — времени выражаются естественным образом. Немало парадоксов общей теории относительности связано с тем, что истинные явления недостаточно отделяются от «псевдоявлений», обусловленных

выбором, иногда неудачным, системы координат или, вообще говоря, методом арифметизации событий.

Чтобы пояснить эту мысль, рассмотрим способ арифметизации точек пространства посредством измерения натяжения упругой нити так, что длина x у нас будет выражаться в единицах силы f , растягивающей нить. Поскольку для малых натяжений имеет место закон Гука:

$$x = \alpha f \quad (2.14)$$

(здесь α — постоянный коэффициент), то все геометрические измерения могли бы быть выражены в единицах, измеряющих f . В силу пропорциональности (2.14) для чисел f сохранились бы все соотношения геометрии Евклида. Однако природа вещей такова, что, начиная с некоторого значения натяжения f , начинаются отступления от закона Гука и он принимает вид

$$x = \varphi(f) = \alpha f + \beta f^2 + \dots, \quad (2.15)$$

или

$$f = \varphi^{-1}(x), \quad (2.15')$$

где φ^{-1} — функция, обратная φ .

Отношение окружности круга к его диаметру теперь выразилось бы так:

$$\pi_f = \frac{f_{\text{окр}}}{f_{\text{диам}}} = \frac{\varphi^{-1}(2\pi r)}{\varphi^{-1}(D)} \neq \pi. \quad (2.16)$$

Число π_f зависело бы теперь от размера круга. Подобным же образом усложнялась бы и теорема Пифагора:

$$f_{AB}^2 + f_{BC}^2 \neq f_{AC}^2. \quad (2.17)$$

Известное неравенство для сторон треугольника ABC :

$$AB + BC \geq CA, \quad (2.18)$$

также могло бы не выполняться для треугольников с большой стороной CA , так как с ростом растяжения $x = CA$ сила натяжения f_{CA} становится относительно меньше (длина нити стремится к ∞ при конечном значении f).

Посмотрим, как выглядело бы у нас равномерное движение. Предполагая, что у нас есть хорошие («жесткие») часы, получим

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{d^2 \varphi^{-1}(x)}{dx^2} < 0. \quad (2.19)$$

Иными словами, равномерно движущееся тело представлялось бы нам движущимся замедленно.

Рассматриваемый здесь способ арифметизации пространства посредством растяжения упругой нити сам по себе не является бессмысленным и не может быть отвергнут. На самом деле, ввиду однозначного соответствия между растяжением x и силой f он является одним из допустимых способов упорядочения точек в пространстве. Более того, для малых масштабов, в области применимости закона Гука, предложенный способ равносильен обычному — измерению с помощью жестких масштабов. Почему же мы все же должны предпочесть применение жестких стержней?

Ответ на этот вопрос может быть дан из сравнения:

а) степени универсальности метода и

б) степени общности закономерностей, которые выявляет тот или иной предлагаемый метод арифметизации пространства.

Обратимся сперва к пункту а).

Все реальные стержни по-разному отклоняются от идеального «абсолютно жесткого» стержня. Однако имеется обширная область масштабов и температур, когда эти отклонения невелики и могут быть учтены в форме поправок.

Упругие нити также по-разному отличаются от идеально упругой нити, строго следующей закону Гука, но эти отклонения не являются поправками и существенно влияют на результаты измерений. Таким образом, универсальность «динамометра» как прибора для определения длин очень невелика. Каждый динамометр вносил бы индивидуальные особенности своего характера в пространственно-временные отношения событий.

Второй пункт (б) также не говорит в пользу измерения расстояний растяжением упругой нити. Применяя этот метод, мы бы установили, что малые круги имеют постоянные отношения π , а большие круги имеют различные отношения (см. 2.16). Аддитивность отрезков, вообще говоря, не имела бы места: $AB + BC \neq AC$. Для некоторых треугольников выполнялось бы неравенство сторон треугольника, для других оно не имело бы места; тело, не подверженное действию сил, «двигалось» бы замедленно и т. п.

Так бы и выглядел для нас мир, в котором геометрические измерения производятся растяжением нитей и динамометром.

Если бы мы своевременно перешли к арифметизации жесткими масштабами, мы обнаружили бы известные соотношения геометрии Евклида и закон инерции. Оказалось бы, что для всех окружностей $2\pi r/D = \pi$, для всех треугольников $AB + BC \geq CA$, для всех тел, не подверженных внешним воздействиям, $d^2x/dt^2 = 0$ и т. п., т. е. закономерности, ранее имевшие силу только для малых масштабов, $f \ll f_0$ (f_0 — то значение натяжения, при котором функция $\varphi(f)$ уже заметно отличается от αf ($\alpha = \text{const}$)), в новой системе арифметизации сами по себе распространяются на всю область значений x и становятся *всеобщими*.

Таким образом, не всякая система арифметизации пространства и времени выявляет внутренние закономерности пространственно-временных отношений.

Итак, среди возможных систем и методов арифметизации существуют методы, обладающие *максимальной универсальностью* и *максимальной способностью* выявить наиболее общие закономерности во взаимоотношении событий.

§ 3. О делении многообразия событий на пространство и время

Если некоторое событие P способно оказать влияние на событие P' , то такое событие можно использовать как сигнал, распространяющийся из точки P в точку P' в многообразии событий $\mathfrak{N}_n(P)$ *).

Совокупность событий P' , на которые способны влиять события, происходящие в P , образует многообразие $\mathfrak{L}_+(P, P')$. Это многообразие мы будем называть *абсолютным будущим* по отношению к точке P . Совокупность событий P' , способных повлиять на события в P , образует многообразие $\mathfrak{L}_-(P, P')$, которое мы будем называть *абсолютным прошедшим* по отношению к точке P .

*) $\mathfrak{N}_n(P)$ означает n -мерное многообразие событий; $\mathfrak{N}_n(x)$ означает многообразие, но арифметизованное, т. е. каждой точке P приписаны координаты (x) . Это иногда будет отмечаться символом $P(x)$. Очевидно, что $\mathfrak{N}_n(P(x)) = \mathfrak{N}_n(x)$.

Если имеет место порядок причины и следствия, то области \mathfrak{T}_+ и \mathfrak{T}_- не имеют общих точек, кроме самой точки P :

$$\mathfrak{T}_+ \cap \mathfrak{T}_- = 0. \quad (3.1)$$

Многообразие, объединяющее области \mathfrak{T}_+ и \mathfrak{T}_- :

$$\mathfrak{T}_+ \cup \mathfrak{T}_- = \mathfrak{T}(P, P'), \quad (3.2)$$

назовем *временной областью* (по отношению к точке P).
Всю остальную часть многообразия событий:

$$\mathfrak{S}(P, P') = \mathfrak{N}(P) - \mathfrak{T}(P, P'), \quad (3.3)$$

назовем *пространственной областью* или, попросту, *пространством* (по отношению к точке P).

Чтобы конкретизировать этот принцип деления многообразия $\mathfrak{N}_n(P)$ на пространственное $\mathfrak{S}(P)$ и временное $\mathfrak{T}(P)$, предположим, что физическим событием является значение некоторого скалярного поля $\varphi = \varphi(P)$, удовлетворяющего дифференциальному уравнению второго порядка в многообразии $\mathfrak{N}_n(P)$:

$$A_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + R = Q, \quad (3.4)$$

где коэффициенты $A_{\alpha\beta}$ и R в общем случае являются функциями поля φ и его первых производных $\varphi_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}$, Q — внешний источник поля, зависящий только от точки P , $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$.

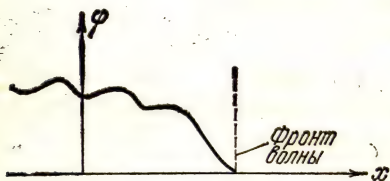


Рис. 1. Слабый разрыв на поверхности фронта волны.

Рассмотрим теперь как распространяется сигнал, подчиняющийся уравнению (3.4). Под сигналом

мы будем подразумевать волну, фронт которой определяется функцией

$$S = S(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const}, \quad (3.5)$$

причем на границе фронта имеет место разрыв первых производных (см. рис. 1). Такой разрыв называют *слабым*. Из теории дифференциальных уравнений известно [9, 10], что уравнение для поверхности такого разрыва

определяется полностью коэффициентами при вторых производных уравнения (3.4):

$$A_{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x_\alpha} \frac{\partial S}{\partial x_\beta} = 0. \quad (3.6)$$

Это уравнение, с точностью до членов порядка $1/\omega$, совпадает с уравнением для фазы Φ волн высокой частоты ω :

$$\varphi = ae^{i\omega\Phi}, \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Именно, подстановка (3.7) в (3.4) при $\omega \rightarrow \infty$ приводит к уравнению

$$A_{\alpha\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\beta} + O\left(\frac{1}{\omega}\right) = 0. \quad (3.6')$$

Уравнение (3.6) есть уравнение геометрической оптики. Векторы нормалей \mathbf{N} к поверхности

$$\Phi = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const} \quad (3.5')$$

совпадают с направлением лучей и имеют компоненты

$$N_\alpha \sim \frac{\partial \Phi}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

Возьмем произвольный действительный вектор $\xi (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и образуем квадратичную форму:

$$F(\xi, \xi) = A_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta. \quad (3.8)$$

Если эта форма дефинитна:

$$F(\xi, \xi) > 0 \text{ или } F(\xi, \xi) < 0 \quad (3.9)$$

для любых ξ , то уравнение для вектора нормали \mathbf{N}

$$F(\mathbf{N}, \mathbf{N}) = 0 \quad (3.10)$$

будет иметь мнимые корни, и, следовательно, нет никакого распространения поля φ в многообразии $\mathfrak{R}_n(x)$. В этом случае события образуют застывший в неподвижности мир. Если же мы будем насильственно варьировать поле φ , например, путем вариации источника поля $Q(x)$ в окрестности некоторой точки P так, что

$$\delta Q(x) = \varepsilon \delta^4(x - x_P), \quad (3.11)$$

где ε — малое число, то состояние поля φ изменится во всем многообразии $\mathfrak{R}_n(x)$.

Уравнение (3.4) в этом случае является уравнением эллиптического типа [9], и никаких выделенных многообразий внутри $\mathfrak{N}_n(x)$ не возникает.

Рассмотрим второй случай, когда форма $\mathfrak{N}_n(x)$ не дефинитна:

$$F(\xi, \xi) \leq 0 \quad (3.9')$$

в зависимости от области значений переменных ξ . В этом случае, который называют гиперболическим, имеются действительные направления N , которые удовлетворяют уравнению (3.6). Совокупность этих направлений образует

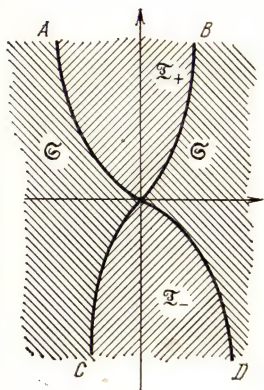


Рис. 2. Временные многообразия \mathfrak{I}_+ и \mathfrak{I}_- и пространственное многообразие \mathfrak{S} . ABCD — сечение характеристического конуса.

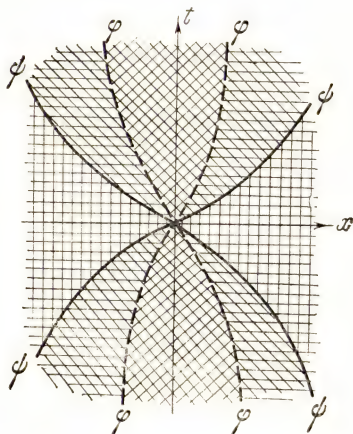


Рис. 3. Два характеристических конуса для полей ϕ и ψ .

характеристический конус. Этот конус (см. рис. 2) разделяет многообразие $\mathfrak{N}_n(x)$ относительно каждой точки P на две области: \mathfrak{I} ($\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_+ + \mathfrak{I}_-$) и \mathfrak{S} . Область \mathfrak{I}_+ может быть достигнута любыми сигналами, исходящими из P и имеющими скорость распространения меньше скорости сигнала v_ϕ , характерной для поля ϕ . Подобным же образом область \mathfrak{I}_- содержит точки P' , сигнал из которых может достигнуть точки P , если его скорость $v \leq v_\phi$. Об-

ласть \mathfrak{S} содержит точки, которые достигаются сигналами из P , имеющими скорость $v > v_\phi$.

Мы можем сказать иначе: характеристический конус разбивает многообразие $\mathfrak{N}_n(x)$ на многообразия \mathfrak{I} и \mathfrak{S} по отношению к сигналу типа ϕ . В области \mathfrak{I} (в верхнем конусе) лежат события, которые могут быть генетически связаны с событием в точке P ; в области \mathfrak{I}_- (в нижнем конусе) лежат события, могущие влиять на характер события P .

Рассмотрим теперь случай, когда имеются два типа полей ϕ и ψ , имеющих различные скорости распространения v_ϕ и v_ψ , и пусть $|v_\phi| < |v_\psi|$. На рис. 3 изображены характеристические конусы для этих двух полей. Рассмотрим, какая возникнет ситуация в зависимости от того, с помощью какого из сигналов (ϕ или ψ) произведено разделение на пространство и время. Предположим для определенности, что v_ϕ есть скорость звука, а v_ψ — скорость света ($|v_\phi| < |v_\psi|$). Предположим, далее, что среди населения есть группа слепых, не воспринимающих сигнала ψ ; их недостаток будет основанием для выбора ими звукового поля в качестве поля, с помощью которого они устанавливают связи между явлениями. Итак, эти люди разделяют многообразие $\mathfrak{N}_n(P)$ на \mathfrak{I}_ϕ и \mathfrak{S}_ϕ и не будут иметь понятия о делении $\mathfrak{N}_n(x)$ на \mathfrak{I}_ψ и \mathfrak{S}_ψ . Как будет выглядеть для них взаимосвязь событий в многообразии $\mathfrak{N}_n(P)$?

Рассмотрим эту связь, пользуясь графиком на рис. 4. Пусть A и B — две пространственно удаленные точки. Расстояние между ними могло бы быть измерено звуковым сигналом v_ϕ или твердым масштабом. Пусть событие в A есть искра, порождающая звук и свет. В точке A' наблюдатель A примет звук, отраженный от точки B'

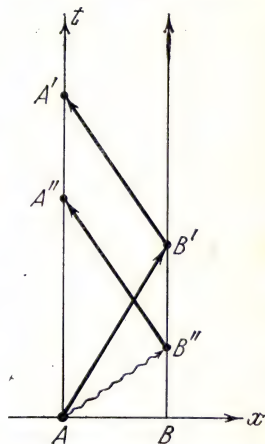


Рис. 4. Сплошные прямые линии — распространение звука: волнистая линия — распространение света. Звуковой сигнал « $B'' - A''$ » воспринимается как нарушающий «акустическую» причинность.

(эхо); но свет искры, достигающий точки B'' , может породить звук, который достигнет наблюдателя A в точке A'' , предшествующей по времени точке A' . Слепой наблюдатель A придет к заключению, что звуковое явление A'' нарушает порядок причины и следствия: сигнал A'' пришел раньше, чем его можно было ожидать, если его причиной является отражение звука в точке B .

Однако этот же наблюдатель мог бы обнаружить постоянство, с которым явление A'' предшествует явлению A' , и прийти к правильному заключению, что помимо сигнала звукового поля φ существует еще и другое, скрытое от него поле ψ , распространяющееся со скоростью v_ψ , большей скорости звука v_φ . Иными словами, предположенная им предельная скорость v_φ на самом деле не является таковой: есть другая скорость $v_\psi > v_\varphi$. Итак, слепой наблюдатель был бы поставлен перед дилеммой: или допустить события, которые нарушают причинность (относительно разделения $\mathfrak{H}_n(P) = \mathfrak{T}_\varphi + \mathfrak{S}_\varphi$), или пересмотреть способ, которым он разделил $\mathfrak{H}_n(P)$ на \mathfrak{T} и \mathfrak{S} . Мы видим, что для упорядочения событий с соблюдением причинности необходимо пользоваться сигналом, имеющим наибольшую скорость из всех возможных.

Насколько тесно связано деление на пространство и время с физикой явлений, можно видеть из того обстоятельства, что если бы не обнаружилось постоянства в предшествовании события A'' событию A' , то наблюдатель пришел бы к прискорбной для его науки мысли о существовании явлений, не подчиняющихся причинности.

Такую ситуацию нетрудно себе представить, если допустить, что состояние среды («эфира»), в которой распространяется сигнал ψ , было бы не менее капризно, чем, скажем, состояние земной атмосферы, и это состояние оказывало бы влияние на скорость сигнала v_ψ . Время AA'' подвергалось бы тогда случайным колебаниям, что крайне затруднило бы интерпретацию «непредвиденного» явления в A'' .

В заключение этого раздела рассмотрим один любопытный пример, могущий служить дополнительной иллюстрацией к принципу деления многообразия $\mathfrak{H}(P)$ на временное \mathfrak{T} и пространственное \mathfrak{S} многообразия [11].

Пусть поле φ подчиняется скалярному уравнению Клейна; рассмотрим сперва случай двух измерений (x_1 и

x_4). В этом случае

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_4^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \pm m^2 \varphi = 0. \quad (3.12)$$

Будем считать, что $x_4 = t$ есть время ^{*}), а $x_1 = x$ есть пространственная координата; в уравнении (3.12) мы допустили два знака для m^2 (m пропорционально массе частиц поля φ). Полагая $\varphi \sim e^{+i(\omega t - kx)}$, получим

$$\omega = \pm \sqrt{k^2 \pm m^2}. \quad (3.13)$$

Отсюда следует, что для частиц с реальной массой $m^2 > 0$ групповая скорость волн, а следовательно и скорость сигнала, будет равна

$$u = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{k}{\omega} \leq 1. \quad (3.14)$$

Для случая $m^2 < 0$, напротив,

$$u = \frac{k}{\omega} > 1. \quad (3.15)$$

Стало быть, в первом случае сигналы будут распространяться внутри конуса \mathfrak{T} (см. рис. 5), и если события упорядочены с помощью предельно быстрого сигнала $u=1$, то в силу того, что $u \leq 1$, для всех сигналов будет соблюдаться нормальный порядок причины — следствия. Если же $m^2 < 0$, то сигналы, распространяющиеся со скоростью $u > 1$, будут нарушать причинность (они будут распространяться внутри пространственного конуса \mathfrak{G}).

Однако легко видеть, что принятая нами интерпретация переменных x_1 и x_4 в многообразии $\mathfrak{R}_2(x)$ является в случае $m^2 < 0$ неправильной [11]: действительно, по определению временной области \mathfrak{T} это есть область, внутри которой распространяются сигналы. Поэтому правильная

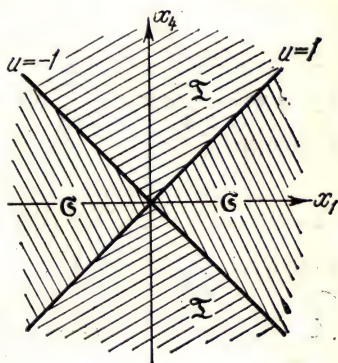


Рис. 5. В случае $m^2 > 0$ $x_4 = t$, $x_1 = x$; при $m^2 < 0$ $x_4 = x$, $x_1 = t$, т. е. пространственные и временные области меняются местами.

^{*}) В уравнении (3.12) скорость света c положена равной единице.

интерпретация требует в случае $m^2 < 0$ положить $x_4 = x$ и $x_1 = t$; это видно и непосредственно из уравнения (3.12), которое переходит само в себя при замене $m^2 \rightarrow -m^2$, $x_4 \leftrightarrow x_1$.

В случае четырех измерений, $\mathcal{R}_4(x)$, положение дел несколько сложнее. Уравнение в этом случае примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_4^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \pm m^2 \varphi = 0, \quad (3.12')$$

и форма написания этого уравнения предполагает, что мы намерены рассматривать x_4 как время t , а x_1, x_2, x_3 — как три пространственные координаты. Найдем выражение функции Грина для этого уравнения. Для этого обратимся к неоднородному уравнению

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_4^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} \pm m^2 G = \delta(x_4) \delta(x_3) \delta(x_2) \delta(x_1). \quad (3.16)$$

Полагая

$$G(x) = \int \tilde{G}(q) e^{iqx} d^4q, \quad (3.17)$$

где $qx = \sum_{i=1}^4 q_i x_i = \sum_{k=1}^3 q_k x_k - q_4 x_4$, и подставляя это в (3.16), получим

$$\tilde{G}(q) = \frac{1}{[q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \pm m^2 - q_4^2]}, \quad (3.18)$$

откуда

$$G(x) = \int \frac{e^{iqx} d^4q}{[q^2 \pm m^2 - q_4^2]}, \quad (3.19)$$

где $q = (q_1, q_2, q_3)$; в случае $m^2 > 0$ мы можем рассматривать q_4 как частоту $\omega = \pm \sqrt{q^2 + m^2}$. Групповая скорость всех волн, идущих из точки $x=0$, будет $u = \partial\omega/\partial k \leq 1$, и мы можем интерпретировать координату x_4 как время t , а x_1, x_2, x_3 — как три пространственные координаты; при $m^2 < 0$ (знак минус в уравнении (3.19)) сигналы из точки $x=0$, со скоростью $u = \partial\omega/\partial k \geq 1$, пойдут внутри конуса \mathcal{C} (так же как в случае двух из-

мерений), и если мы и в этом случае будем настаивать на рассмотрении x_4 как времени, то придем к противоречию с определением этого понятия: область влияния при $m^2 < 0$ есть область вне светового конуса (см. рис. 6). Мы должны признать, что имеем дело с многообразием, в котором имеется три времени: $t_1 = x_1$, $t_2 = x_2$, $t_3 = x_3$ — и одно пространственное измерение $x = x_4$.

§ 4. Аффинное многообразие

Как было разъяснено выше, в принципе возможны различные способы арифметизации многообразия событий.

Некоторые из них будут естественно выделять самые глубокие черты пространственно-временных соотношений, другие будут подобны кривому зеркалу, в котором действительность изображается в искаженном виде. Эта карикатура может зайти так далеко, что действительность станет почти неузнаваемой (или, говоря философским языком, почти *непознаваемой*).

Наиболее общие черты геометрического многообразия, которые должны быть отражены в принятой системе арифметизации, могут быть отмечены: а) непрерывностью и б) характером топологической связности *). Пункт а) мы расшифруем так: будем предполагать, что у каждой точки $P(x)$ многообразия $\mathfrak{H}_n(P(x))$ есть окрестность, образованная соседними точками.

Если без разрывов деформировать это многообразие, то соседние точки продолжают оставаться соседними и структура нашего многообразия будет характеризоваться исключительно особенностями топологической связности

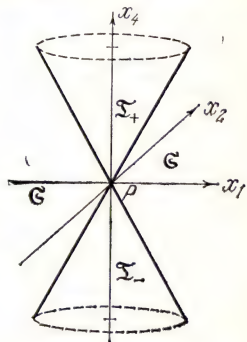


Рис. 6. При $m^2 > 0$ сигналы из вершины характеристического конуса P сосредоточены внутри области \mathfrak{I} , которую и следует считать временной; в случае $m^2 < 0$ они распространяются в области \mathfrak{E} , в этом последнем случае $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2$, $x_4 = x$.

*) Ограничение а) исключает из нашего рассмотрения многообразия, состоящие из счетного множества точек (например, пространственные решетки).

(пункт б)), т. е. совокупностью деформаций, не нарушающих непрерывность многообразия. На рис. 7 в качестве примеров многообразий приведены трехмерные поверхности. Поверхности тел a и b , c и d попарно топологически эквивалентны; но поверхности a и b не эквивалентны по-

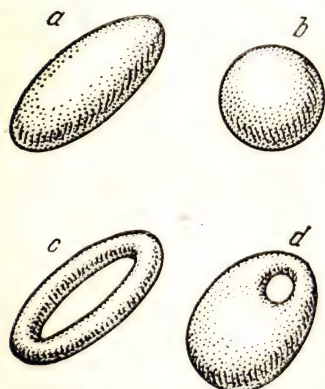


Рис. 7. Топологически эквивалентные поверхности.

верхностям c и d , так как первый род поверхностей нельзя непрерывной деформацией перевести во второй род. Произведем такую арифметизацию многообразия, что соседние точки многообразия будут отмечаться соседними числами. Ввиду непрерывности многообразия эти числа будут также непрерывны.

В соответствии с размерностью n многообразия $\mathfrak{N}_n(P(x)) \equiv \mathfrak{N}_n(x)$ количество чисел, характеризующих любую точку многообразия, равно n . Эти n чисел мы называли ранее координатами $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ точки P . Координаты можно выбирать различным образом, и с математической точки зрения достаточно, чтобы различные допустимые системы координат могли быть взаимно однозначно связаны между собою, если не во всем многообразии $\mathfrak{N}_n(x)$, то по крайней мере в отдельных его частях, покрывающих все многообразие $\mathfrak{N}_n(x)$. Если такие части суть $\mathfrak{N}'_n(x)$, $\mathfrak{N}''_n(x)$, $\mathfrak{N}'''_n(x) \dots$, то

$$\mathfrak{N}_n(x) \subset \mathfrak{N}'_n \cup \mathfrak{N}''_n \cup \mathfrak{N}'''_n \dots$$

Общее преобразование координат в одной из таких областей (которая может покрывать и все многообразие $\mathfrak{N}_n(x)$) можно записать в виде [12, 14]

$$x'^\mu = f^\mu(x), \quad (4.1)$$

где $f^\mu(x)$ — дифференцируемые функции, $\mu = 1, 2, \dots, n$. Обозначим

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} = \alpha^\mu_\nu, \quad (4.2)$$

так что

$$dx'^{\mu} = \alpha_{\nu}^{\mu} dx^{\nu}. \quad (4.3)$$

Мы будем считать, что уравнение (4.3) разрешимо относительно dx^{ν} , так что детерминант

$$|\alpha_{\nu}^{\mu}| \neq 0. \quad (4.4)$$

В многообразии $\mathfrak{M}_n(x)$ можно рассматривать функции точки P : скалярное поле $\varphi(P)$, поле векторное $A^{\mu}(P)$ ($\mu = 1, 2, \dots, n$), тензорные поля различных рангов $T^{\mu\nu\dots}(P)$ ($\mu, \nu, \dots = 1, 2, \dots, n$), которые преобразуются следующим образом при преобразовании координат (4.1):

$$\varphi'(P') = \varphi(P') = \varphi(P), \quad (4.5)$$

$$A'^{\mu}(P') = \alpha_{\nu}^{\mu}(P) A^{\nu}(P), \quad (4.5')$$

$$T'^{\mu\nu\dots}(P') = \alpha_{\sigma}^{\mu}(P) \alpha_{\rho}^{\nu}(P) \dots T^{\sigma\rho\dots}(P), \quad (4.5'')$$

причем под P' разумеется точка, возникающая из точки P при преобразовании (4.1). Векторы и тензоры, преобразующиеся по законам (4.3), (4.5') и (4.5''), называются *контравариантными*.

Можно рассмотреть векторы $A_{\mu}(P)$ и тензоры $T_{\mu\nu\dots}(P)$, преобразующиеся по закону

$$A'_{\mu}(P') = \beta_{\mu}^{\nu}(P) A_{\nu}(P), \quad (4.6)$$

$$T'_{\mu\nu\dots}(P') = \beta_{\mu}^{\sigma}(P) \beta_{\nu}^{\rho}(P) \dots T_{\sigma\rho\dots}(P), \quad (4.6')$$

где

$$\beta_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}. \quad (4.6'')$$

Такие векторы и тензоры называются *ковариантными* [14].

Поскольку векторы в различных точках многообразия преобразуются различным образом (коэффициенты $\alpha_{\nu}^{\mu}(P)$ и $\beta_{\mu}^{\nu}(P)$ суть функции точки P), то сравнение двух векторов в различных точках многообразий $A(P)$ и $A(P')$ не может быть произведено без дальнейших определений: для сравнения этих векторов нужно перенести вектор $A(P)$ в точку P' *параллельно самому себе*. При этом компоненты вектора $A^{\mu}(P)$ претерпят изменение δA^{μ} (см.

рис. 8). Рассмотрим это изменение для случая бесконечно близких точек $P(x)$ и $P' = P(x + dx)$. Величина δA^μ должна быть функцией самих компонент перемещаемого вектора (так как для нулевого вектора $\delta A^\mu \equiv 0$!) и к тому же линейной функцией (сумма векторов должна преобразовываться как вектор); далее, величина δA^μ должна быть пропорциональна смещению dx^μ (при $dx^\mu = 0$, $\delta A^\mu = 0$). Поэтому δA^μ можно представить в виде

$$\delta A^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta, \quad (4.7)$$

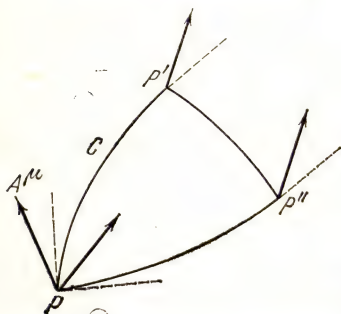


Рис. 8. Параллельный перенос вектора по замкнутому контуру $PP'P''$, состоящему из отрезков геодезических линий.

где $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ суть функции точки P .

Коэффициенты $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ называются *коэффициентами аффинной связности* (или *символами Кристоффеля*). Полное изменение вектора $A(P)$ при переходе от точки P к P' будет равно

$$DA^\mu = dA^\mu - \delta A^\mu, \quad (4.8)$$

и, следовательно, производная компоненты вектора A^μ по x_ν будет

$$\frac{DA^\mu}{Dx_\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu A^\alpha. \quad (4.9)$$

Это — так называемая *ковариантная производная* [13].

Рассмотрим теперь некоторую линию в n -мерном многообразии

$$x^\mu = X^\mu(\tau), \quad (4.10)$$

где τ — параметр, с помощью которого задается линия. Среди различных линий, проходящих через точки P и P' , есть такая, касательная к которой

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (4.11)$$

остается параллельной самой себе, т. е. на этой кривой ковариантная производная от касательного вектора равна нулю:

$$Du^\mu = du^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha dx^\beta = 0 \quad (4.12)$$

или, иначе,

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0. \quad [(4.12)']$$

Такая линия называется *геодезической* [12—14].

В силу самого определения параллельного переноса должен сохраняться «угол» между касательной к геодезической линии и любым другим вектором, если его переносить вдоль этой линии; поэтому для любого вектора A имеем

$$DA^\mu = 0. \quad (4.13)$$

Рассмотренное изменение компонент вектора при параллельном переносе является постулатом аффинной геометрии и теснейшим образом связано с понятием кривизны аффинного многообразия.

Рассмотрим бесконечно малый контур C , составленный из геодезических линий (см. рис. 8). Перенесем вектор A параллельно самому себе вдоль этого контура. Тогда изменение компонент вектора определится выражением

$$\Delta A^\mu = \oint_C \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta; \quad (4.14)$$

применяя теорему Стокса, получим

$$\Delta A^\mu = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\Gamma_{\alpha\sigma}^\mu A^\alpha)}{\partial x^\rho} - \frac{\partial (\Gamma_{\alpha\rho}^\mu A^\alpha)}{\partial x^\sigma} \right] \Delta f^{\rho\sigma}, \quad (4.15)$$

где $\Delta f^{\rho\sigma}$ — компоненты площадки, натянутой на контур C . Частные производные, входящие в (4.15), могут быть с помощью (4.13) выражены через компоненты вектора A .

В результате получим

$$\Delta A^\mu = -\frac{1}{2} R_{\alpha\rho\sigma}^\mu A^\alpha \Delta f^{\rho\sigma}, \quad (4.16)$$

где

$$R_{\alpha\rho\sigma}^\mu = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\rho}^\mu}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \Gamma_{\alpha\sigma}^\lambda - \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha\rho}^\lambda \quad (4.17)$$

есть *тензор кривизны многообразия (тензор Римана)*. Можно доказать, что этот тензор антисимметричен относительно индексов σ , ρ , т. е.

$$R_{\alpha\rho\sigma}^{\mu} = -R_{\alpha\sigma\rho}^{\mu}, \quad (4.18)$$

причем

$$R_{\alpha\rho\sigma}^{\mu} + R_{\sigma\rho\alpha}^{\mu} + R_{\rho\alpha\sigma}^{\mu} = 0. \quad (4.19)$$

§ 5. Риманово многообразие

Рассмотренное выше аффинное многообразие еще слишком общо. Если аффинную геометрию дополнить понятием расстояния между двумя точками, иными словами, внести в многообразие метрику, то мы придем к *метрической геометрии*, или к *римановой геометрии*.

Вместо расстояния между точками P и P' мы будем употреблять более общее понятие *интервал*, имея в виду включить в многообразие не только пространство, но и время.

Интервал между двумя бесконечно близким точками $P(x)$ и $P(x+dx)$ будем обозначать через ds . Согласно основной *гипотезе Римана* величина ds^2 есть квадратичная форма разностей координат точек P и P' :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (5.1)$$

где $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(P)$ есть симметричный тензор $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, называемый *метрическим тензором*. Поворотом системы координат в окрестности точки P и надлежащим выбором масштабов форма (5.1) может быть приведена к каноническому виду [14]

$$ds^2 = \varepsilon_{\mu\mu} (dx^{\mu})^2, \quad (5.1')$$

где $\varepsilon_{\mu\mu} = \pm 1$. Величину $f = \sum_{\mu=1}^n \varepsilon_{\mu\mu}$ называют *сигнатурой метрики*. Если сигнатура равна числу измерений, $f = n$, то метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^n (dx^{\mu})^2 \quad (5.1'')$$

и выражает теорему Пифагора в бесконечно малом для n -мерного пространства *). Если $f \neq n$, то интервал ds^2 можно представить в виде

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^m (dx^\mu)^2 - \sum_{\mu=m+1}^n (dx^\mu)^2, \quad (5.1'')$$

так что $f = 2m - n + 1$. В этом случае теорема Пифагора соблюдается в каждом из многообразий $\mathfrak{R}_m(x)$ и $\mathfrak{R}_{n-m}(x)$; такое пространство называют *псевдоевклидовым*.

Выбор квадратичной формы для ds^2 был неоднократно предметом обсуждения. Фактически эта гипотеза Римана означает, что в окрестности каждой точки P имеет место «обычная» геометрия, основанная на представлении о твердых телах; для этого типа геометрии обоснование квадратичной формы, определяющее понятие расстояния, было дано Г. Гельмгольцем (ср. § 2). Таким образом, общий случай римановой геометрии ведет либо к евклидовой, либо к псевдоевклидовой геометрии в окрестности каждой точки n -мерного многообразия $\mathfrak{R}_n(x)$.

Напомним несколько важных формул геометрии Римана.

Метрическая форма (5.1) позволяет определить и скалярное произведение двух векторов (AB) , взятых в точке P :

$$(AB) = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^\mu B_\mu, \quad (5.2)$$

где

$$B_\mu = g_{\mu\nu} B^\nu \quad (5.3)$$

есть ковариантная форма вектора B .

Разрешая (5.3) относительно B^ν , получим

$$B^\mu = g^{\mu\nu} B_\nu, \quad (5.4)$$

где $g^{\mu\nu} = M^{\mu\nu}/g$, а $M^{\mu\nu}$ есть минор определителя

$$g = |g_{\mu\nu}|. \quad (5.5)$$

Из определения преобразования тензоров (см. § 4) следует, что скалярное произведение есть *инвариант* относительно преобразования координат (4.3). При параллель-

*) Заметим, что здесь понятие бесконечно малого имеет чисто математический смысл. Физически это могут быть кубические километры в Галактике или кубические ферми внутри атомного ядра.

ном переносе из P в соседнюю точку P' не должны меняться длина вектора A (точнее, ее квадрат):

$$L^2 = (AA) \quad (5.6)$$

и угол между любыми векторами A и B :

$$\cos \theta = \frac{AB}{\sqrt{(AA)} \sqrt{(BB)}}, \quad (5.7)$$

т. е. ковариантная производная от скалярного [произведения (AB) должна равняться нулю:

$$D(AB) = 0. \quad (5.8)$$

Это соотношение позволяет выразить коэффициенты аффинной связности $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ через метрический тензор $g_{\mu\nu}$. Оказывается, что

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}} \right). \quad (5.9)$$

На основании (5.9) и (4.17) можно получить и выражение тензора кривизны через вторые производные метрического тензора. Если ввести ковариантный тензор кривизны

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = g_{\mu\lambda} R^{\lambda}_{\alpha\beta\gamma}, \quad (5.10)$$

то оказывается, что

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\mu\gamma}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\beta}} \right) + g_{\rho\sigma} (\Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} \Gamma_{\mu\gamma}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\rho} \Gamma_{\mu\beta}^{\sigma}). \quad (5.11)$$

В общей теории относительности существенную роль играют симметричный тензор

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad (5.12)$$

и скалярная кривизна

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (5.13)$$

Таким образом, в метрической геометрии Римана все важные в аффинной геометрии величины выражаются через метрический тензор и его производные.

Рассмотрим еще групповые свойства в геометрии Римана. Для этой цели вместо общего преобразования коор-

динат (4.1) обратимся к бесконечно малому преобразованию

$$x^{\mu'} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x), \quad (5.14)$$

где $\xi(x)$ — бесконечно малый вектор.

Это преобразование можно также рассматривать как бесконечно малое смещение точки P в точку $P' = P(x')$. При таком смещении метрический тензор претерпевает преобразование

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma} = \\ &= g_{\mu\nu}(P) - g_{\mu\rho}(P) \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\nu}} - g_{\rho\nu}(P) \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

С другой стороны, исходная метрика в точке P' может быть выражена через метрику в точке P посредством разложения

$$g_{\mu\nu}(P') = g_{\mu\nu}(P) + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \xi^{\rho}(P) + \dots \quad (5.16)$$

Отсюда изменение тензора $g_{\mu\nu}$, вызванное смещением $P \rightarrow P'$, будет равно

$$\Delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\nu}} - g_{\rho\nu} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \xi^{\rho} + \dots \quad (5.17)$$

Метрика не изменится при этом смещении, если $\Delta g_{\mu\nu} = 0$, т. е. если

$$g_{\mu\rho} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\nu}} + g_{\rho\nu} \frac{\partial \xi^{\rho}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \xi^{\rho} = 0. \quad (5.18)$$

Это — уравнения группы бесконечно малых смещений. Их называют *уравнениями Киллинга* [12, 14]. Если для многообразия $\mathfrak{M}_n(P)$ с метрикой (5.1) можно найти бесконечно малый вектор $\xi^{\mu}(P)$, удовлетворяющий уравнениям Киллинга, то многообразие $\mathfrak{M}_n(P)$ допускает группу преобразований, характеризуемую вектором $\xi^{\mu}(P)$. В частности, в случае евклидова пространства $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ и уравнения Киллинга гласят:

$$\frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0, \quad (5.19)$$

откуда

$$\xi^{\mu} = \alpha^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad (5.20)$$

где $\alpha_\mu^\mu = -\alpha_\mu^\mu$ и a^μ суть бесконечно малые постоянные. Стало быть, группа движений евклидова пространства состоит из вращений $\hat{O}(\alpha)$ и трансляций $\hat{T}(a)$. Из приведенных выше формул видно, что метрическая формула (5.1), определяющая геометрию в малом, полностью характеризует риманово многообразие. Она как бы является той элементарной клеткой, из которых складывается вся структура геометрии в целом.

Мы уже останавливались на основаниях, которые диктуют выбор квадратичной формы (5.1) для квадрата интервала.

В своей знаменитой диссертации [15] Риман впервые указал на связь постулатов геометрии с физикой, которая приобрела фундаментальное значение в общей теории относительности Эйнштейна. Современная физика, как мы увидим позднее, вновь стоит перед необходимостью критического пересмотра геометрических представлений применительно к микромиру. Поэтому в заключение этого отдела будет весьма уместно привести гениальные слова Римана относительно геометрии в малом:

«Вопрос о том, справедливы ли допущения геометрии в бесконечно малом, тесно связан с вопросом о внутренней причине возникновения метрических отношений в пространстве. Этот вопрос, конечно, также относится к области учения о пространстве, и при рассмотрении его следует принять во внимание сделанное выше замечание о том, что в случае дискретного многообразия принцип метрических отношений содержится уже в самом понятии этого многообразия, тогда как в случае непрерывного многообразия его следует искать где-то в другом месте. Отсюда видно, что то реальное, что создает идею пространства, образует дискретное многообразие, или же нужно пытаться объяснить возникновение метрических отношений в чем-то внешнем — силами связи, действующими на это реальное.

Решение этих вопросов можно надеяться найти лишь в том случае, если, исходя из ныне существующей и проверенной опытом концепции, основа которой положена Ньютоном, станем постепенно ее совершенствовать, руководясь фактами, которые ею объяснены быть не могут; такие же исследования, как произведенные в настоящей работе, именно имеющие исходным пунктом общие поня-

тия, служат лишь для того, чтобы движению вперед к успехам в познании вещей не препятствовали ограниченность понятий и укоренившиеся предрассудки.

Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке—физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшний день» [15]*).

§ 6. Физика арифметизации пространственно-временного многообразия

Приписывание физическим событиям определенных координат не является только математической операцией. Выдача «паспорта» каждому событию сама по себе предполагает определенные манипуляции с материальными объектами, необходимыми для определения положения события в пространстве и времени.

Классическим способом арифметизации являлось применение *равномерно идущих часов* («жестких» часов) и *жесткого масштаба*. Однако проблема согласования часов и масштабов в системах отсчета, движущихся относительно друг друга, потребовала использования сигналов, законы распространения которых обладали бы наибольшей общностью и простотой. Эта проблема стала особенно острой применительно к телам, движущимся с большими скоростями (исторически такими телами явились электроны, скорость которых сравнима со скоростью света). Сигналами, наиболее естественно удовлетворяющими поставленным выше условиям, являются *световые сигналы*. Скорость этих сигналов оказывается также предельной для всех материальных тел и полей. В частности, скорость сигнала, распространяющегося по твердому масштабу, значительно меньше скорости света c . Поэтому мы не имеем права в пределах точности, требуемой теорией относительности, считать твердый стержень абсолютно жестким: необходимо иметь в виду его упругость и способность к деформациям. Формально можно сказать, что теория относительности исключает возможность существования абсолютно жестких стержней.

*) Г. Вейль в статье, посвященной Ф. Клейну, замечает, что, может быть, в основе геометрии лежат все же дискретные многообразия: «...теперь менее, чем когда-либо, можно поклясться, что в основе геометрии не лежит дискретное многообразие» [16].

Поэтому, согласно идее, высказанной еще Г. Вейлем [17] и развитой Р. Марцке [18], мы не будем прибегать к помощи жестких масштабов, а используем импульсы света (вспышки) для измерения как расстояний, так и промежутков времени.

Световые часы могут быть построены из двух зеркал, обращенных друг к другу и не поглощающих света. Если между такими зеркалами заключить импульс света, то он будет попеременно отражаться то от одного зеркала, то от другого (см. рис. 9).

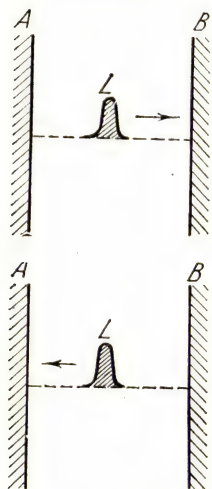


Рис. 9. Световые часы: A и B — зеркала, L — импульс света.

Число отражений N может быть принято для отсчета времени. Такие «световые» часы, конечно, необязательны. Мы могли бы взять и любой другой периодический процесс, например отражение звука или равномерное вращение волчка. Заметим, что в любом случае у нас нет априорных оснований быть убежденными в строгой равномерности хода избранных часов. Неравномерность хода часов могла бы быть обнаружена лишь в том случае, если бы наблюдалась неравномерность в ходе всех явлений. Тогда было бы естественно заподозрить неравномерность часов, как причину наблюдаемых изменений в скорости протекания всех явлений. Выбором других, более совершенных (более независимых от внешних

обстоятельств) часов мы бы окончательно убедились в том, что прежние часы «пошаливали».

Световые часы с зеркалами имеют то преимущество, что, согласно принципам теории относительности, достаточно хорошо обоснованным экспериментально, скорость света c не зависит ни от движения источника света (в данном случае от зеркал), ни от движения наблюдателя. Таким образом, равномерность хода световых часов основывается на весьма общих принципах, а природа зеркал и возможное изменение их состояния оказываются несущественными, лишь бы расстояние между ними не менялось и поглощение света оставалось бы незначительным.

Отсутствие дисперсии световых волн в пустоте является важным условием возможности использования световых импульсов в световых часах и в качестве сигналов для установления метрики.

Действительно, пусть световой сигнал задан в пространстве при $t=0$ в форме $\varphi(\mathbf{x}, 0)$. Представим его в виде суперпозиции плоских волн:

$$\varphi(\mathbf{x}, 0) = \int_{k>0} C(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (6.1)$$

Этот сигнал в момент t будет иметь форму

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int C(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} = \varphi(|\mathbf{x}| - ct, 0) \quad (6.1')$$

(где ω есть частота, $\omega = c|k|$, c — скорость света), т. е. сигнал не меняет своей формы и не расплывается в пространстве. Иными словами, черточки и точки азбуки Морзе не сливаются друг с другом по мере распространения сигнала *).

Теперь мы обратимся к мысленному опыту по определению интервалов между явлениями. На диаграмме (рис. 10, а) по вертикали отсчитывается время t , а по горизонтали — пространственная координата x . Линия AA' есть *мировая линия* наблюдателя A ; в его распоряжении имеются два зеркала, образующие световые часы: первое зеркало имеет мировую линию AA' , второе зеркало — близкую мировую линию CC' . Зигзагообразная линия между AA' и CC' есть мировая линия светового импульса, отражающегося последовательно от зеркал A и C . Каждый излом этой линии может быть использован как отсчет времени. Пусть мировая линия другого тела B будет BB' . Для того чтобы определить *интервал* s_{AB} между событиями A и B , пошлем из A световой импульс в B , где поставим **зеркало**, *отправляющее сигнал* обратно, в A . Будучи испущен в момент времени $t_1 = t - AB/c$ (по световым часам в A), этот сигнал вернется в A в момент времени $t_2 = t + AB/c$. Поэтому интервал s_{AB} между событиями A и B будет определяться формулой

$$s_{AB}^2 = t_1 t_2 = t^2 - \frac{AB^2}{c^2} > 0. \quad (6.2)$$

*) Эта особенность светового импульса сохраняется и в трехмерном случае (см. § 17).

Причем $t_1 = N_1 \tau$ и $t_2 = N_2 \tau$, где N_1 и N_2 — число отражений, отсчитываемых по световым часам, а τ — период часов. В рассматриваемом случае интервал s_{AB}^2 больше нуля. Такой интервал называют *временным*.

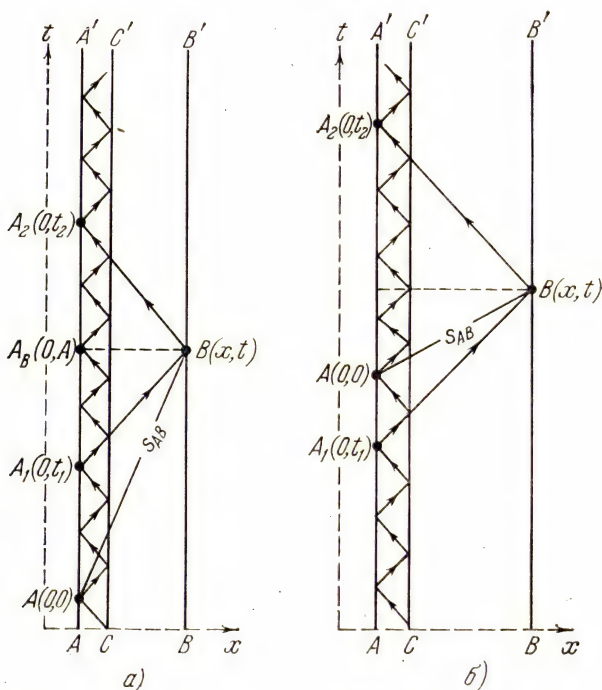


Рис. 10. Измерение интервала s_{AB} между событиями A и B с помощью отражения светового импульса. а) Интервал временной; б) интервал пространственный, AA' — мировая линия наблюдателя A ; CC' — линия второго зеркала его часов, BB' — мировая линия события B .

На рис. 10, б приведен пример, когда световой сигнал из A не может достигнуть события B . Нетрудно видеть, что в этом случае следует считать $t_1 < 0$ (см. точку $A_1(0, t_1)$ на рис. 10, б), тогда интервал подчиняется прежней формуле:

$$s_{AB}^2 = t_1 t_2 = t^2 - \frac{AB^2}{c^2} < 0, \quad (6.3)$$

однако он теперь меньше нуля. Интервал в этом случае называют *пространственным*.

Если скорость света является предельной, то рассмотренный способ арифметизации событий производит деление многообразия событий $\mathfrak{N}_n(x)$ на пространственное $\mathfrak{S}(x)$ и временное $\mathfrak{T}(x)$ с помощью светового конуса

$$s^2 = t^2 - \frac{r^2}{c^2} = 0, \quad (6.4)$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Вместе с тем вводится вполне определенная форма причинной связи событий. Событие в мировой точке P может влиять лишь на событие, находящееся внутри верхнего конуса $\mathfrak{T}_+(P)$ (см. рис. 6), определяемого уравнением

$$t - \frac{r}{c} = 0. \quad (6.5)$$

Все события, находящиеся внутри конуса абсолютного прошедшего $\mathfrak{T}_-(P)$:

$$t + \frac{r}{c} = 0, \quad (6.6)$$

могут влиять на событие в P . События, находящиеся в пространственной области \mathfrak{S} :

$$t^2 - \frac{r^2}{c^2} < 0, \quad (6.7)$$

не могут быть связаны причинным образом (генетически) с событиями в точке P .

В связи с тем, что все геометрические соотношения определяются часами и световыми сигналами, иногда геометрию четырехмерного многообразия с сигнатурой $f = -2$ называют *хроногеометрией* (см. [18]).

§ 7. Арифметизация событий в случае нелинейной теории поля

Этот параграф должен служить иллюстрацией к принципам деления многообразия событий $\mathfrak{N}(x)$ на пространственное $\mathfrak{S}(x)$ и временное $\mathfrak{T}(x)$, изложенным в § 3.

В случае нелинейной теории поля скорость сигнала зависит от величины поля и его производных. Поэтому само деление $\mathfrak{N}(x)$ на пространственное и временное многообразие существенно зависит от динамики движения сигнала. В частности, характеристический конус (см. рис. 2) в этом случае искривлен, а при некоторых значениях поля и его производных может стать даже мнимым. Чтобы не усложнять изложения, будем считать поле скалярным и ограничимся двумя измерениями: $x_1 = x$, $x_4 = t$.

В качестве основы такой теории примем вариационный принцип с функцией Лагранжа, зависящей от инвариантов, образованных из поля $\varphi(x, t)$ и его первых производных $p = \partial\varphi/\partial t$, $q = \partial\varphi/\partial x$ *). Такими инвариантами являются

$$I = \frac{1}{2} \varphi^2, \quad (7.1)$$

$$K = \frac{1}{2} (p^2 - q^2). \quad (7.1')$$

Функция Лагранжа \mathcal{L} будет равна

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(K, I), \quad (7.2)$$

а вариационный принцип гласит:

$$\delta L = \int \delta \mathcal{L} dx dt = 0. \quad (7.3)$$

Ясно, что в такой форме теория гарантирует инвариантность относительно преобразования Лоренца. Выполняя варьирование, замечаю, что

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} (p \delta p - q \delta q) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I} \varphi \delta \varphi, \quad (7.4)$$

допуская, как обычно, исчезновение поверхностных членов в интеграле (7.3) и приравнивая нулю коэффициент при $\delta \varphi$, получим из (7.3)

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} p \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} q \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I} \varphi = 0 \quad (7.5)$$

*) Эта теория представляет собою скалярный вариант нелинейной электродинамики М. Борна и Л. Инфельда, развитой ими в 30-х годах [19, 20]. В изложении скалярной теории мы следуем работе [21].

или

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + R\varphi = 0, \quad (7.6)$$

где

$$A = -(1 + \alpha p^2), \quad B = \alpha pq, \quad C = (1 - \alpha q^2), \quad R = \gamma - 2\beta K \quad (7.7)$$

и

$$\alpha = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial K^2} \Big/ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K}, \quad \beta = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial K \partial I} \Big/ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K}, \quad \gamma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I} \Big/ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K}. \quad (7.8)$$

В случае, когда \mathcal{L} линейно зависит от инвариантов K, I , когда $\alpha = \beta = 0$ и $\gamma = \text{const}$, мы возвращаемся к линейному уравнению Клейна для скалярного поля φ . Характеристические направления уравнения (7.6) определяются из уравнения (см., например, [22] или [23])

$$A\xi^2 + 2B\xi + C = 0, \quad (7.7')$$

где

$$\xi = \frac{dx}{dt} \quad (7.8')$$

есть скорость распространения фронта волны, который мы, как и ранее в § 3, считаем *слабым* разрывом. Из (7.7) находим

$$\xi = \frac{\pm \sqrt{1 + 2\alpha K - \alpha pq}}{1 + \alpha p^2} \quad (7.9)$$

или, при малых $\alpha(K, I)$,

$$\xi = \pm 1 \mp \frac{1}{2} \alpha (p \pm q)^2 + \dots \quad (7.10)$$

Если теперь представим себе, что на отрезке $a < x < b$ при $t=0$ задано некоторое начальное состояние φ , $p, q = \partial\varphi/\partial x$, то, как видно из (7.9) и (7.10), оно будет распространяться по характеристикам со скоростью ξ , отличающейся от скорости света c , которая в обозначениях этого параграфа равна ± 1 . На рис. 11, а и 11, б представлены два возможных случая распространения поля: а) когда скорость распространения $|\xi| < 1$ и б) когда $|\xi| > 1$; в последнем случае нелинейный сигнал нарушает релятивистскую причинность и арифметизация многообразия событий должна быть пересмотрена.

Интересно и то обстоятельство, что в нелинейной теории нельзя исключить и такую ситуацию, когда при определенных значениях φ , p и q характеристические направления станут мнимыми, так что уравнение (7.6) будет принадлежать к эллиптическому типу. В этом случае понятие причинной последовательности событий теряет свой смысл, и мы будем иметь дело со связанным «комком» событий, которые взаимно друг друга обуславливают, но

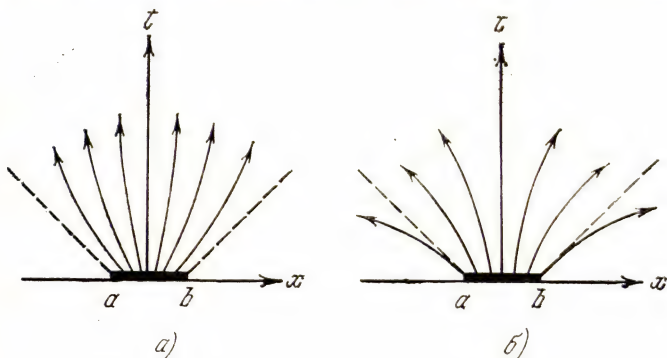


Рис. 11. Характеристики нелинейного поля.

$$a) |\xi| = \left| \frac{dx}{dt} \right| < 1; \quad b) |\xi| = \left| \frac{dx}{dt} \right| > 1.$$

не следуют одно из другого [21]. Если допустить, что такое положение имеет место где-то внутри частиц, в области сильных полей, то вдали от частиц уравнение должно становиться уравнением гиперболического типа. На поверхности, где совершается этот переход, детерминант

$$B^2 - AC = 1 + 2\alpha K \quad (7.11)$$

обращается в нуль. Переход от эллиптического типа к гиперболическому сопровождается разрывом первых производных поля φ (p или q или обоих) (см. [10], [23]).

В заключение заметим, что теория нелинейного электромагнитного поля очень сходна с теорией скалярного поля. В этом случае инварианты K и I имеют вид

$$K = \frac{1}{2} (\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2), \quad I = (\mathcal{E}\mathcal{H}), \quad (7.12)$$

где \mathcal{E} и \mathcal{H} имеют смысл напряженностей электромагнитного поля. Варьируя электромагнитные потенциалы A и φ такие, что

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } \varphi, \quad \mathcal{H} = \text{rot } A, \quad (7.13)$$

получим из вариационного принципа (7.3) уравнения электромагнитного поля:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \text{rot } B, \quad \text{div } D = 0, \quad (7.14)$$

где D и B суть электромагнитные индукции:

$$D = M\mathcal{E} - N\mathcal{H}, \quad B = M\mathcal{H} + N\mathcal{E}, \quad (7.15)$$

а величины M и N равны

$$M = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K}, \quad N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I}. \quad (7.15')$$

Вторая группа уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathcal{E}, \quad \text{div } \mathcal{H} = 0 \quad (7.16)$$

получается непосредственно из (7.13). Для одномерного случая $\mathcal{E}(\mathcal{E}_x, 0, 0)$, $\mathcal{H}(0, \mathcal{H}_y, 0)$ и $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}(t, z)$, $\mathcal{H}_y = \mathcal{H}(t, z)$ получаем из (7.14) и (7.16)

$$\left. \begin{aligned} (1 + \alpha \mathcal{E}^2) \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \alpha \mathcal{E} \mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - \alpha \mathcal{E} \mathcal{H} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \\ + (1 - \alpha \mathcal{H}^2) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

где по-прежнему $\alpha = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial K^2} \bigg|_{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K}}$. Уравнение для характеристического направления $\xi = \partial z / \partial t$ будет теперь иметь вид

$$(1 + \alpha \mathcal{E}^2) \xi^2 + 2\alpha \mathcal{E} \mathcal{H} \xi - (1 - \alpha \mathcal{H}^2) = 0, \quad (7.18)$$

откуда

$$\xi = \pm \frac{\sqrt{1 + 2\alpha K} - \alpha \mathcal{E} \mathcal{H}}{1 + \alpha \mathcal{E}^2} \quad (7.19)$$

или, при малых α ,

$$\xi = \pm 1 \mp \frac{1}{2} \alpha (\mathcal{E} \pm \mathcal{H})^2 + \dots \quad (7.20)$$

Как видно из изложенного, нелинейная теория поля допускает скорость сигналов, которая может оказаться и меньше и больше скорости света c или даже стать мнимой. Поэтому теория относительности, допуская постоянство скорости света в пустоте, неявно предполагает линейность теории [24]. Подробно вопросы распространения сигналов в нелинейной теории М. Борна рассмотрены в работе [25]. В § 43 мы вернемся к теории М. Борна в связи с квантованием пространства—времени.

§ 8. Общая теория относительности и арифметизация пространства — времени

В общей теории относительности метрика риманова многообразия событий становится зависящей от движения материи.

Коэффициенты $g_{\mu\nu}(x)$ в метрической форме, определяющей интервал между близкими событиями

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (8.1)$$

в общей теории относительности являются функционалом от энергии—импульса тензора материи $T_{\mu\nu}(x)$:

$$g_{\mu\nu}(x) = G_{\mu\nu}\{T_{\mu\nu}(x)\}. \quad (8.2)$$

Эта функциональная связь определяется с помощью знаменитого *уравнения Эйнштейна* [13, 14, 26]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{\kappa}{c^2} T_{\mu\nu}(x), \quad (8.3)$$

где $\kappa = 8\pi\gamma/c^2 = 1,86 \cdot 10^{-27}$ см/г—гравитационная постоянная Эйнштейна *), $R_{\mu\nu}$ —тензор кривизны 2-го ранга, а R —скалярная кривизна (см. § 5).

К уравнению (8.3) должны быть добавлены: а) уравнения движения материи (например, уравнения релятивистской гидродинамики, если материя может быть представлена в виде жидкости или газа, или уравнения электромагнитного поля, если материей является это поле, и т. д.), б) граничные и начальные условия.

*) Здесь $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8}$ см³/(г·с²) есть гравитационная постоянная Ньютона.

Общая теория относительности допускает столь же общее преобразование координат, как и геометрия Римана (ср. § 5):

$$x^{\mu'} = f^{\mu}(x), \quad (8.4)$$

где функция $f^{\mu}(x)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathfrak{H}_4(x)$ на $\mathfrak{H}_4(x')$. Огромный произвол, содержащийся в этом преобразовании, должен использоваться с большой степенью осторожности. Формальное равноправие различных систем координат на самом деле может сводиться почти к нулю особенностями, присущими самой задаче. Математически произвольный выбор системы координат должен быть проконтролирован изучением возможности реализовать выбранную систему координат физическими методами: иными словами, должны быть указаны физически осуществимые методы измерения интервалов в многообразии событий.

Основная особенность геометрии Римана — *псевдоевклидовость в бесконечно малом* подсказывает, что ранее рассмотренный метод определения интервала между событиями A и B (ср. § 6) может быть перенесен и в общую теорию относительности, если только события A и B бесконечно близки друг к другу. Пусть в выбранной системе координат квадрат интервала имеет вид

$$ds^2 = g_{44}(dx^4)^2 + 2g_{4s}dx^4dx^s + g_{rs}dx^rdx^s, \quad (8.5)$$

где $s, r = 1, 2, 3$.

Для светового сигнала $ds^2 = 0$, так что

$$dx^4 = -\frac{g_{4s}dx^s}{g_{44}} \pm \sqrt{\frac{(g_{4s}dx^s)^2}{g_{44}^2} - \frac{g_{rs}dx^rdx^s}{g_{44}}}, \quad (8.6)$$

где два знака \pm отвечают прямому, из A в B , и обратному, из B в A , сигналам.

Обратимся теперь к чертежу на рис. 10 (стр. 40) и будем считать события A и B бесконечно близкими. Координаты события A будут $x_A^1 = x_A^2 = x_A^3 = x_A^4 = 0$, а координаты события B — $dx_B^1, dx_B^2, dx_B^3, dx_B^4$. Собственное время в точке A получим из (8.5), полагая $dx^s = 0$:

$$ds = d\tau = \sqrt{g_{44}}(dx^4). \quad (8.7)$$

Из рис. 10 имеем

$$d\tau_1 = \sqrt{g_{44}}(dx_B^4 - dx_A^4), \quad d\tau_2 = \sqrt{g_{44}}(dx_B^4 - dx_A^4), \quad (8.8)$$

где dx_1^4 есть изменение dx^4 , соответствующее приходу сигнала из A_1 в B , а dx_2^4 — то же для сигнала из B в A_2 . Эти величины определяются из формулы (8.6).

Перемножая теперь $d\tau_1$ и $d\tau_2$, получим

$$ds_{AB}^2 = d\tau_1 d\tau_2 = g_{44} (dx_B^4)^2 + g_{rs} dx_r dx_s, \quad (8.9)$$

т. е. обобщение формулы (8.5). Это — для временного интервала s_{AB} .

Аналогично для пространственного интервала получим

$$-ds_{AB}^2 = -d\tau_1 d\tau_2 = -g_{44} (dx_B^4)^2 - g_{rs} dx^r dx^s. \quad (8.9')$$

Полагая здесь $dx_B^4 = 0$, найдем выражение для *расстояния* между A и B :

$$dl^2 = d\tau_1 d\tau_2 = -g_{rs} dx^r dx^s, \quad (8.10)$$

или

$$dl = \sqrt{-g_{rs} dx^r dx^s}. \quad (8.10')$$

Расстояние между двумя точками A и B , удаленными на конечное расстояние

$$l_{AB} = \int_B^A \sqrt{-g_{rs} dx^r dx^s}, \quad (8.11)$$

будет зависеть от пути интегрирования. Можно определить «истинное» расстояние как расстояние вдоль геодезической линии:

$$l_{AB}^0 = \int_A^B \sqrt{-g_{rs} \frac{dx^r}{d\sigma} \frac{dx^s}{d\sigma}} d\sigma, \quad (8.12)$$

причем интеграл (8.12) взят при условии, что координаты кривой $x^s(\sigma)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 x^s}{d\sigma^2} + \Gamma_{jk}^s \frac{dx^j}{d\sigma} \frac{dx^k}{d\sigma} = 0. \quad (8.12')$$

Согласно основному уравнению Эйнштейна (8.3) при наличии материи кривизна пространства отлична от нуля и в общем случае из-за движения материи зависит от времени. Поэтому проблема арифметизации многообразия событий в общей теории относительности становится весьма сложной *).

*) См. подробности в [14] и [18].

Наиболее естественным способом арифметизации событий представляется последовательная арифметизация от одного события к соседнему, бесконечно близкому. Пользуясь световыми сигналами, мы можем определить расстояние от точки A до соседней точки B и синхронизовать часы в A и B . При этом, по определению, одновременными будем считать момент $B(x, t)$ и момент $A_B(0, t)$, соответствующий среднему между отправлением сигнала из точки A_1 и получением отраженного сигнала в точке A_2 (см. рис. 10):

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{44}} dx^4 &= \frac{1}{2} (d\tau_1 + \sqrt{g_{44}} dx_1^4 + d\tau_2 + \sqrt{g_{44}} dx_2^4) = \\ &= \frac{1}{2} (d\tau_1 + d\tau_2) - g_{45} dx^5 / \sqrt{g_{44}}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Если событие A_B поместить в эту точку, то $d\tau_1 = -d\tau_2$, разность времени x^4 между двумя «одновременными» событиями A и B будет составлять

$$dx_B^4 = -g_{45} dx^5 / g_{44} \quad (8.13')$$

и являться той величиной, на которую следует «подвести» часы в B . Следует заметить, что мы производили измерения, исходя из метрики в точке A .

Мы могли бы также производить измерения, исходя из метрики в точке B .

Ввиду того, что собственное время в точках A и B протекает различным образом, результаты измерений расстояний будут также различны. При малости расстояния AB эти различия будут иметь место лишь во втором порядке. Действительно, различия в интервалах, измеренных в A и B , составляют

$$\begin{aligned} \Delta s_{AB}^2 &= [g_{\mu\nu}(B) - g_{\mu\nu}(A)] dx^\mu dx^\nu = \\ &= \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta + \dots \right] dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Подходящим выбором системы координат выражение в квадратных скобках, содержащее первые степени дифференциалов, может быть обращено в нуль. Таким образом, существенное различие в измерениях интервала из точек A и B определяется величинами четвертого порядка малости. Это последнее различие может быть связано

с кривизной пространства и поэтому выбором системы координат, вообще говоря, ликвидировано быть не может.

Вернемся теперь к вопросам арифметизации многообразия событий. Мы видели, что, по крайней мере для окрестности точки, в общей теории относительности сохраняется арифметизация, характерная для специальной теории относительности: все дело сводится к измерению промежутков времени и к посылке световых сигналов.

Поэтому естественным выражением интервала является псевдоевклидово:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2), \quad (8.15)$$

где $c dt = dx_4$ и dt есть собственное время, а dx_1, dx_2, dx_3 суть длины по осям 1, 2, 3, измеренные с помощью светового сигнала. В системе координат, где интервал имеет вид (8.15), значения координат совпадают с числовыми значениями промежутков времени и расстояний.

Таким образом, в принципе мы имеем две возможности. Мы можем приписать событиям более или менее произвольные четверки чисел (соблюдая лишь топологическую непрерывность) и затем с помощью часов и световых сигналов *калибровать* эту систему, т. е. связать эти числа со значением интервалов между бесконечно близкими событиями.

Другой путь соответствует только что изложенному выше: производятся измерения промежутков времени и расстояний между событиями, и на эти измерения «*натягивается*» подходящая система координат.

§ 9. Хроногеометрия

Арифметизация событий, а priori произвольная, на самом деле требует применения определенных физических методов, которые сами по себе должны совершенствоваться как в отношении расширения круга применимости, иными словами, в отношении общности метода, так и в отношении увеличения точности.

Долгое время физика пользовалась для измерения времени астрономическими часами — вращением Земли, а в качестве масштаба длины — платино-иридиевым стержнем — «стандартным метром».

В последние годы стандарты времени и длины заимствуются из атомной физики. Наиболее точными часами являются часы атомные или молекулярные, а в качестве стандарта длины принята длина волны λ красно-оранжевой линии спектра инертного газа криптона (Kr^{86}); длина стандартного метра оказывается тогда равной $1\,650\,763,73\lambda$. Атомные и молекулярные часы обязаны своим происхождением развитию техники атомных или молекулярных пучков и практическому применению индуцированного излучения [18]. Пучок атомов цезия дает очень узкую линию и обеспечивает стабильность частоты (частота составляет приблизительно 9000 Мгц) до 10^{-12} за несколько месяцев. Столь же высокой стабильностью обладает и излучение атомов водорода (длина волны около 21 см , частота 1420 Мгц). Подробности об устройстве атомных или молекулярных часов можно найти в статье [27]. Вместо масштаба длины можно пользоваться скоростью света в пустоте. Наиболее точные современные данные приводят к величине [27]

$$c = 299\,792,5 \pm 0,4 \text{ км/сек.}$$

Применение часов в качестве стандартов для арифметизации пространственно-временного многообразия следует рассматривать как наиболее совершенный и наиболее универсальный метод арифметизации, какой в состоянии предложить современная физика. Поэтому геометрию, лежащую в основе современной физики, часто называют *хроногеометрией*, подчеркивая этим названием фундаментальную роль светового сигнала и часов. Нет оснований думать, что геометрические измерения в макроскопическом мире перестанут интересовать физиков и геометров. Проблема арифметизации в нестационарном мире, видимо, еще ждет своего решения. Еще более глубокие проблемы возникают в том случае, когда нестационарность имеет стохастический характер, так что метрический тензор $g_{\mu\nu}$ становится случайной величиной.

Однако мы не будем вдаваться в эти проблемы большого мира. Напротив, обращаясь к главному предмету этой монографии, к геометрии микромира, мы будем исходить из предположения, что по крайней мере в стационарном макромире или в ограниченных областях нестационарного макромира принципы арифметизации в фи-

зических событиях достаточно ясны и мы понимаем, что означают символы x , y , z , t для макроскопического события: в основе осмысливания их физического значения лежит хроногеометрия.

Принципы хроногеометрии будут на протяжении монографии в явной форме или в форме неявного предположения использоваться в качестве основы для обсуждения геометрических измерений в микромире.

Переходя в дальнейшем к проблемам микромира, мы увидим, шаг за шагом, постепенно нарастающую степень абстракции в применении понятий пространственно-временных координат x , y , z , t в мире элементарных частиц. Мы должны подготовить себя к тому, что это возрастание абстрактности граничит с отрицанием самого физического смысла этих переменных, которые привыкли считать пространственно-временными координатами.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ В МИКРОМИРЕ

§ 10. Замечания об измерениях в микромире

В стандартных курсах квантовой механики любят подчеркивать влияние прибора на состояние измеряемого микрообъекта.

Однако более фундаментальным обстоятельством для понимания истинной ситуации в микромире является признание факта совершенно обязательного влияния микрообъекта на состояние макроскопического прибора.

Существенно отметить, что измерительный прибор должен быть *нестабильной макроскопической* системой: только такую макроскопическую систему микроявление способно вывести из состояния неустойчивого равновесия и тем самым породить развитие макроскопического явления. Это макроскопическое явление и может быть использовано для измерения состояния микросистемы.

Схематически ситуацию в квантовой механике можно изобразить с помощью условной формулы

$$\mathfrak{M} = M + (A + D), \quad (10.1)$$

где \mathfrak{M} означает всю макроскопическую обстановку, в которой «живет» микросистема μ , а M означает ту часть макрообстановки, которая диктует исходное состояние микросистемы μ . Повторение микросистемы μ , погруженных в одну и ту же макроскопическую обстановку M , образует квантовый ансамбль \mathfrak{N} :

$$\mathfrak{N} = M + \mu, M + \mu, M + \mu, \dots \quad (10.2)$$

Взятая в скобку $(A + D)$ часть \mathfrak{M} образуется макроскопическим прибором, который состоит из анализатора A и детектора D .

Предполагается, что эта часть всей обстановки не оказывает существенного влияния на формирование состояния микросистемы в обстановке M (иначе прибор

$(A+D)$ нельзя было бы отделить от формирующей части M). Это обстоятельство является также необходимым для возможности замены одного прибора $(A+D)$ другим прибором $(A+D)'$, приспособленным для анализа состояния микрообъекта μ по другим измеримым параметрам этой микросистемы. Анализатор A сортирует микросистемы по

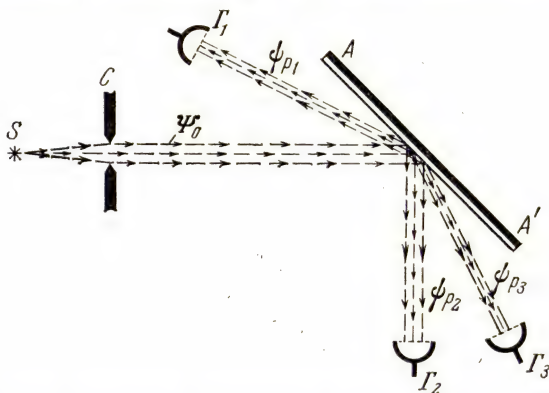


Рис. 12. Схемы измерений в квантовой механике. Источник частиц S и щель C образуют часть M макробстановки M , определяющую исходный ансамбль Ψ_0 . $M = S + C$; дифракционная решетка AA' является анализатором; она разлагает Ψ_0 на пучки с определенным импульсом ψ_{p1} , ψ_{p2} , ψ_{p3} , ...; счетчики Гейгера Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 , ... являются детектором D : $D = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \dots$; наконец, $M = M + (A + D)$.

состояниям. Назначение детектора D заключается в регистрации наличия микросистемы в том или ином состоянии. Детектор является неустойчивой макроскопической системой, способной под воздействием микросистемы менять свое состояние. Пример, иллюстрирующий эту систему, приведен на рис. 12, где показаны источник частиц S и щель C , которые создают направленный поток частиц. Этот источник и щель образуют часть M обстановки, определяющей исходный ансамбль. Для простоты мы будем считать, что он описывается волновой функцией Ψ_0 *). Дифракционная решетка AA' разлагает этот пучок в спектр по различным импульсам p частиц первоначального пучка.

*) То есть мы будем считать ансамбль «чистым» (см. [28]).

Математически это означает, что исходная волновая функция Ψ_0 , описывающая состояния исходного ансамбля частиц, разлагается решеткой в спектр:

$$\Psi_0 = \sum_s C_{p_s} \psi_{p_s}, \quad (10.3)$$

где ψ_{p_s} есть состояние с определенным импульсом, равным p_s , а C_{p_s} — амплитуда этого состояния. Наконец, детектор D образован ловушками микрочастиц $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$; этими ловушками могут служить, например, счетчики Гейгера: при попадании туда заряженной микрочастицы возникает лавина электронов, приводящая к газовому разряду в соответствующем счетчике. Счетчик Гейгера, находящийся под напряжением, является *неустойчивой макроскопической* системой, которая и регистрирует факт появления микрочастицы в одном из возможных состояний $\psi_{p_1}, \psi_{p_2}, \dots$.

Этот пример иллюстрирует тот факт, что вся информация о явлениях в микромире идет через явления в макромире путем развития нестабильных макроскопических явлений *).

§ 11. Измерение координаты микрочастицы

Нерелятивистская квантовая механика формально допускает как угодно точные измерения координаты микрочастицы x, y, z в данный момент времени t [28, 30].

Как и все физические величины, координаты x, y, z изображаются в квантовой механике эрмитовыми операторами $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$. Эти операторы вместе с соответствующими операторами $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ проекций импульса на оси Ox, Oy, Oz подчиняются известным правилам коммутации **):

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar, \quad [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar, \quad [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar, \quad (11.1)$$

$$[\hat{x}, \hat{y}] = [\hat{y}, \hat{z}] = [\hat{z}, \hat{x}] = 0, \quad (11.1')$$

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = [\hat{p}_y, \hat{p}_z] = [\hat{p}_z, \hat{p}_x] = 0. \quad (11.1'')$$

*) Эта точка зрения на измерения в микромире последовательно проведена в монографии [29].

**) Здесь, как обычно, $[A, B] = AB - BA$.

В отличие от пространственных координат четвертая координата—время t —не описывается в квантовой механике (нерелятивистской и релятивистской) каким-либо оператором, а остается классической величиной (параметром). Поэтому в квантовой механике время t рассматривается существенно неравноправно с пространственными координатами x, y, z . Такая неравноправность времени и пространства сохраняется и в релятивистской квантовой механике. Это обстоятельство не должно удивлять нас, так как характерное для теории относительности «равноправие» времени t и координат x, y, z не превышает того, которое содержится в форме

$$s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2). \quad (11.2)$$

Как только мы обращаемся к рассмотрению реальных физических явлений, особое значение времени выступает совершенно отчетливым образом. Действительно, важнейшие задачи физики формулируются таким образом: по начальным значениям динамических переменных определить их значения в будущем. Иными словами, даются значения переменных при $t=0$, требуется найти их значения при $t > 0$ (или $t < 0$). Такая задача в механике вытекает из существа динамических законов. В теории поля соответствующая задача есть задача Коши. По самому существу динамических законов мы не можем, например, корректно поставить задачу: «даны t, y и z при $x=0$, определить их значения при $x \neq 0$ ». Это важнейшее обстоятельство выражается в квантовой механике в том, что в пространстве переменных x, y, z, t (пространство $\mathfrak{H}_4(x)$) не наложено никаких связей на эти переменные, в то время как в пространстве сопряженных импульсов $p_x, p_y, p_z, p_t = E$ *) (пространство $\mathfrak{H}_4(p)$) наложены связи, вытекающие из динамики.

Именно, в нерелятивистской теории в отсутствие внешних полей

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad p = (p_x, p_y, p_z), \quad (11.3)$$

где m — масса частицы.

*) Четвертая компонента импульса p_t есть энергия E .

В релятивистской теории соответственно

$$E = + \sqrt{p^2 + m^2}. \quad (11.3')$$

В силу соотношений (11.3) или (11.3') пространство $\mathfrak{R}_4(p)$ сводится к пространству меньшего числа измерений $\mathfrak{R}_3(p)$. В релятивистском случае (11.3') это пространство есть пространство Лобачевского (см. § 31).

В квантовой механике соотношения (11.3) и (11.3') можно рассматривать также как следствия уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi, \quad (11.4)$$

где Ψ — волновая функция, а \hat{H} — оператор Гамильтона. Этот оператор есть функция операторов импульса p_x, p_y, p_z . Видом гамильтониана \hat{H} задается динамика в квантовой механике. В частности, заметим, что релятивистское уравнение Дирака, в которое время входит совершенно симметрично с пространственными координатами (ср. § 14), может быть также записано в несимметричном, «шредингеровском» виде (11.4).

Для стационарных состояний волновая функция Ψ зависит от времени только через множитель $e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$. В этом случае из (11.4) следует

$$E\Psi = \hat{H}\Psi, \quad (11.5)$$

т. е. возможные значения энергии E (или, что то же, значения четвертой компоненты импульса $P_t = E$) суть собственные значения оператора Гамильтона \hat{H} . Как известно, эти значения могут быть даже и дискретными, в то время как «сопряженная», четвертая координата t непрерывна. В силу этого обстоятельства не существует соотношения [31, 32]

$$[\hat{p}_t, \hat{t}] = i\hbar \quad (\hat{p}_t = \hat{E}), \quad (11.6)$$

подобного соотношениям (11.1), (11.1'), (11.1''). Поэтому не существует и соотношения неопределенностей

$$\overline{\Delta E^2} \overline{\Delta t^2} \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (11.6')$$

подобного соотношению неопределенностей для x и p_x :

$$\overline{\Delta x^2} \overline{\Delta p_x^2} \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (11.1''')$$

вытекающему, как известно, из операторного соотношения (11.1). Вместо (11.6') существует соотношение

$$\overline{\Delta E^2} \tau^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad (11.7)$$

где, однако, τ не есть статистическая дисперсия времени, а вполне определенный промежуток времени, такой, что за время τ средние значения динамических переменных L (не являющихся интегралами движения) изменяются на величину $\overline{\Delta L}$, сравнимую с их статистической дисперсией $\sqrt{\overline{\Delta L^2}}$ [29, 33].

После того как мы поставили на место время t , обратимся к измерению свойств оператора координаты x . В дальнейшем для наших целей достаточно ограничиться одним измерением x . Согласно основным принципам квантовой механики наблюдаемыми значениями x' переменной x являются собственные значения оператора \hat{x} , которые определяются уравнениями

$$\hat{x}\psi_{x'} = x'\psi_{x'}, \quad (11.8)$$

где $\psi_{x'}$ есть собственная функция оператора \hat{x} , принадлежащая собственному значению x' . Явный вид $\psi_{x'}$ зависит от выбранного представления. В импульсном представлении $\psi_{x'}$ есть функция от p_x , а оператор \hat{x} равен

$$\hat{x} = +i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}. \quad (11.9)$$

В координатном представлении $\psi_{x'}$ есть функция x и оператор \hat{x} равен

$$\hat{x} \equiv x. \quad (11.10)$$

Из уравнения (11.8) следует, что в импульсном представлении

$$\psi_{x'}(p_x) = \frac{\exp \frac{i p_x x}{\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \quad (11.11)$$

а в координатном представлении

$$\psi_{x'}(x) = \delta(x - x'). \quad (11.12)$$

При выбранной нами нормировке функций $\psi_{x'}$ они связаны между собой унитарным преобразованием:

$$\psi_{x'}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x|p_x) \psi_{x'}(p_x) dp_x, \quad (11.13)$$

где матричные элементы $S(x|p_x)$ равны

$$S(x|p_x) = \frac{\exp\left(-\frac{ip_x}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \quad (11.14)$$

Из вида собственных функций оператора \hat{x} следует, что в состоянии с определенным значением $x = x'$ участвуют состояния с любым импульсом p_x , от $-\infty$ до ∞ , причем с одинаковым весом, равным $|S(x|p_x)|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar}$. Поэтому точное измерение координаты микрочастицы x требует привлечения в пределе бесконечно большой энергии.

Необходимая энергия может быть заимствована из энергии самой частицы или из другой физической системы, участвующей в измерении (например, от какой-либо части измерительного прибора). Поэтому в случае измерения координаты вмешательство прибора в состояние микрочастицы является и неизбежным, и существенным. Учитывая это вмешательство, лучше говорить не об измерении координаты микрочастицы x , а о *локализации* [30] микрочастицы около точки $x = x'$ в результате ее взаимодействия с измерительным устройством.

Возникшее после локализации частицы состояние $\psi_{x'}$ быстро расплывается, так что *средние значения* квадратичного отклонения $\overline{\Delta x^2} = \overline{(x - \bar{x})^2}$ (черта означает усреднение по ансамблю) будут быстро возрастать с течением времени.

Чтобы рассмотреть расплывание локализованного при $t=0$ в точке $x = x'$ состояния, будем рассматривать $\psi_{x'}(x)$

как предел последовательности функций $\psi_{x'}(x, a)$ при $a \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\psi_{x'}(x, a) &\equiv \frac{\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{a^2}\right)}{\sqrt{\pi} a} = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2}{4} p_x^2 + \frac{i p_x (x-x')}{\hbar}\right) dp_x \quad (11.15)\end{aligned}$$

(величина $C(p_x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left(-\frac{a^2}{4} p_x^2 - \frac{i p_x x'}{\hbar}\right)$ есть та же волновая функция, но взятая в p_x -представлении); при $a \rightarrow 0$ имеем

$$\lim_{a \rightarrow 0} \psi_{x'}(x, a) = \delta(x - x'). \quad (11.16)$$

В силу уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad (11.17)$$

($\hat{H} = \hat{p}_x^2/2m$ есть оператор Гамильтона для свободной частицы, а m — масса этой частицы) каждая плоская волна $\psi_{p_x}(x) = \frac{e^{i p_x x/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$ в суперпозиции волн (11.15) обращается при $t > 0$ в

$$\psi_{p_x}(x, t) = \frac{\exp\left(\frac{i(p_x x - Et)}{\hbar}\right)}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \quad (11.18)$$

где $E(p_x) = p_x^2/2m$ есть кинетическая энергия микрочастицы, имеющей импульс p_x и массу m . Поэтому к моменту времени t волновая функция (11.15) превратится в функцию

$$\psi_{x'}(x, a, t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2 p_x^2}{4} + i \frac{p_x (x-x')}{\hbar} - \frac{i p_x^2 t}{2m\hbar}\right) dp_x. \quad (11.19)$$

Этот интеграл вычисляется подстановкой

$$Z = (A p_x + B), \quad A^2 = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{it}{2m\hbar}\right), \quad B = \frac{i(x-x')}{2\hbar A}. \quad (11.20)$$

В результате интегрирования получается

$$|\psi_{x'}(x, a, t)|^2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi\hbar A}} e^{-B^2}. \quad (11.21)$$

Из этой формулы нетрудно вывести, что ширина пакета

$$\overline{\Delta x^2}(t) = a^2 + \frac{\hbar^2}{a^2 m^2} t^2 \quad (11.22)$$

и возрастает с течением времени; при $a \rightarrow 0$, когда $\psi_{x'}(x, a) \rightarrow \delta(x - x')$, скорость возрастания размеров пакета становится порядка $v \sim \hbar/ma \rightarrow \infty$, что формально допустимо в нерелятивистской теории.

Рассмотренные выше собственные функции оператора \hat{x} квадратично неинтегрируемы. Мы можем рассмотреть другой класс функций $\psi_{x'}(x, a)$, которые остаются квадратично интегрируемыми:

$$\psi_{x'}(x, a) = \frac{\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{2a^2}\right)}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt[4]{a}}. \quad (11.23)$$

Такого рода функция при $a \rightarrow 0$ стремится к $\sqrt{\delta(x-x')}$. Для этой функции

$$\int |\psi_{x'}(x, a)|^2 dx = 1 \quad (11.24)$$

при любом a . Нетрудно видеть, что в состоянии, описываемом функцией (11.23), величина $\overline{\Delta x^2}$ равна

$$\overline{\Delta x^2} = \frac{a^2}{2} \quad (11.25)$$

и при $a \rightarrow 0$ $\overline{\Delta x^2} = 0$. Что же касается оператора \hat{x} , то он будет действовать на функцию $\psi_{x'}(x, a)$ следующим образом:

$$\hat{x}\psi_{x'}(x, a) = x'\psi_{x'}(x, a) + \Delta(x', x, a), \quad (11.26)$$

где

$$\Delta(x', x, a) = \sqrt[4]{\pi} \sqrt[4]{a} \left[(x-x') \frac{\psi(x', a)}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt[4]{a}} \right] \quad (11.26')$$

и при $a \rightarrow 0$

$$\Delta(x', x, a) \rightarrow \sqrt[4]{\pi} \sqrt[4]{a} (x-x') \delta(x-x') = 0. \quad (11.27)$$

Поэтому при $a \rightarrow 0$ функция (11.23) с любой степенью точности удовлетворяет уравнению (11.3).

§ 12. Механика измерения координаты микрочастицы

Рассмотренные до сих пор соображения относительно измерения координаты микрочастицы x являются в значительной мере формальными.

С этой, формальной, точки зрения измерение координаты означает, что некоторое исходное состояние, описываемое волновой функцией $\psi_0(x)$, «стягивается» к состоянию

$$\psi_0(x) \rightarrow \psi_{x'}(x). \quad (12.1)$$

Однако осуществление процесса локализации частицы около какой-нибудь точки $x=x'$ не является простым даже в *мысленном* эксперименте.

В этой связи является важным разделение измерений на *прямые* и *косвенные*, введенное Л. И. Мандельштамом [34]. В случае прямых измерений само измерение происходит в первом звене, соединяющем микрообъект с макроскопическим прибором. Во втором типе измерений имеется одно или несколько опосредствующих звеньев.

Например, если пучок свободных микрочастиц падает на фотопластинку и попадание частицы вызывает на фотопластинке «пятно», то такое явление можно назвать *прямым измерением* координаты свободной частицы. Однако это пятно имеет размеры не меньше размеров атомов пластинки на самом деле даже много больше, так как наименьшее пятно имеет размер чувствительного зерна фотопластинки, в котором падающая частица вызывает цепную реакцию; поэтому исходная волновая функция, описывающая падающий пучок $\psi_0(x)$, стягивается при таком измерении не к $\psi_{x'}(x) = \delta(x-x')$, а к некоторой функции $\psi_{x'}(x, a)$, которая имеет размер a , не меньший размера атомов фотопластинки. Теория, однако, никак не ограничивает размера атомов, которые формально могут быть и очень малыми, поэтому внутреннего противоречия в теории нет.

Примером косвенного измерения может служить измерение координаты электрона в атоме. В принципе такое измерение может быть выполнено путем наблюдения рассеяния узкого пучка микрочастиц на связанном в атоме электроны. Рассеяние этих частиц может непосредственно регистрироваться на экране и относится уже к прямым

измерениям. Узкий пучок микрочастиц, являющийся зондом, которым прощупывают местонахождение электрона в атоме, представляет собою *промежуточное* звено в измерении координаты атомного электрона; поэтому такое измерение есть измерение *косвенное*.

А. Прямое измерение координаты. Обратимся теперь к математической стороне дела и рассмотрим взаимодействие микрочастицы с атомом фотопластинки [29]. Поскольку нас интересует сейчас принципиальная сторона дела, мы будем допускать те или иные идеализации, совместимые с принципами теории. Фотопластинку будем рассматривать как систему бесконечно тяжелых атомов, расположение которых в пространстве известно точно. Первоначальное микроявление, которое является «затравкой» для последующей фотохимической реакции, пусть состоит в возбуждении атома таким образом, что его электрон переходит из состояния $\psi_0(x)$ в состояние $\psi_n(x)$ (здесь x — координата электрона в атоме). Если a — размер атома, то ψ_0 и ψ_n быстро исчезают для $|x| \gg a$. Координату микрочастицы обозначим через Q и предположим, что энергия взаимодействия микрочастицы с электроном атома имеет δ -образный вид:

$$W = g\delta(x - Q), \quad (12.2)$$

где g — константа взаимодействия. Энергия возбуждения атома пусть будет $\varepsilon = \varepsilon_n - \varepsilon_0$, энергия микрочастицы $E = p^2/2m$, m — масса частицы, p — ее импульс до взаимодействия с атомом, p' — ее импульс после взаимодействия с атомом. Мы будем считать, что $E \gg \varepsilon$. Таким образом, источником большой энергии, необходимой для локализации микрочастицы, будет служить энергия самой микрочастицы. Возбуждение перехода $E_0 \rightarrow E_n$, точно локализованного в пространстве атома, играет роль анализатора A , сортирующего микрочастицы по их координатам Q с точностью до размеров атома a . В дальнейшем возбужденный атом может инициировать скрытое изображение в чувствительном зерне фотоэмульсии. Эти или подобные процессы играют роль макроскопического детектора D , разрушающего интерференцию различных состояний микрочастиц. Мы не будем вдаваться в детали расчета работы детектора и ограничимся расчетом первой функции измерительного устройства — анализом частиц

по координатам. Макроскопичность анализатора A в нашем случае выражается в предположении, что масса атома фотопластинки предполагается бесконечно большой, так что его положение в пространстве определено вполне точно.

Волновая функция рассматриваемой системы (микрочастица μ + анализатор A) в начальный момент времени $t=0$ будет иметь вид

$$\Phi_0(x, Q) = \psi_0(x) e^{ipQ/\hbar}. \quad (12.3)$$

Эта функция описывает атом в невозбужденном состоянии и микрочастицу в состоянии плоской волны с импульсом p . Для $t > 0$ представим волновую функцию этой системы в виде

$$\Phi(x, Q, t) = \Phi_0(x, Q) e^{i\omega_0 t} + \varphi(x, Q, t), \quad (12.4)$$

где частота $\omega_0 = (E + \varepsilon_0)/\hbar$; функцию $\varphi(x, Q, t)$ будем считать малой и вычислим ее по теории возмущений. По известным формулам теории возмущений (см., например, [28], гл. XI) имеем

$$\varphi(x, Q, t) =$$

$$= \int d^3p' \sum_n \frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau e^{i\Omega_n \tau} (np' | W | 0p) \psi_n(x) e^{iQp/\hbar}, \quad (12.5)$$

где $(np' | W | 0p)$ есть матричный элемент энергии взаимодействия, взятый между исходным состоянием $\Phi_0(x, Q)$ (12.3) и возбужденным состоянием

$$\Phi_n(x, Q) = \psi_n(x) e^{ip'Q/\hbar}. \quad (12.3')$$

Этот матричный элемент равен

$$\begin{aligned} (np' | W | 0p) &= \int \Phi_n^*(x, Q) W(x, Q) \Phi_0^*(x, Q) dx dQ = \\ &= g \int \Phi_n(Q, Q) \Phi_0(Q, Q) dQ = \\ &= g \int \rho_{n0}(Q) e^{i(p-p', Q)/\hbar} dQ = g \tilde{\rho}_{n0}(q); \quad q = p - p'. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Здесь $\rho_{n0}(Q) = \psi_n(Q) \psi_0^*(Q)$, а $\tilde{\rho}_{n0}(q)$ есть компонента Фурье от $\rho_{n0}(Q)$.

Далее, Ω_n есть частота перехода:

$$\Omega_n = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{p^2}{2M} + \varepsilon_0 - \frac{p'^2}{2M} - \varepsilon_n \right).$$

Если мы рассмотрим малые t : $0 \leq t \leq 1/\Omega_n$, то

$$\begin{aligned} \varphi(x, Q, t) &= \sum_n \int d^3p' \frac{g}{i\hbar} \tilde{\rho}_{n0}(q) e^{iQp'/\hbar} \psi_n(x) t = \\ &= \sum_n \frac{g}{i\hbar} \psi_n(x) \rho_{n0}(Q) e^{iQp/\hbar} t. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Чтобы яснее представить себе результат, допустим, что в сумме по возбужденным состояниям важен лишь один член номера и остальные $\rho_{m0} \approx 0$, если $m \neq n$. Тогда имеем

$$\varphi(x, Q, t) = t \frac{g}{i\hbar} \psi_n(x) \rho_{n0}(Q) e^{iQp/\hbar}. \quad (12.8)$$

Отсюда видно, что при малых t , т. е. вскоре после взаимодействия, волновая функция микрочастицы равна

$$\psi_n(Q) = \rho_{n0}(Q) e^{iQp/\hbar} \quad (12.9)$$

и в точности воспроизводит переходную плотность электрона в атоме $\rho_{n0}(x)$. Эта функция есть волновой пакет с распределением вероятностей для координаты микрочастицы

$$W_n(Q) = |\rho_{n0}(Q)|^2 \quad (12.10)$$

и со средним импульсом

$$\bar{p} = i\hbar \int \Phi_n(Q) \frac{\partial}{\partial Q} \Phi_n(Q) dQ \approx |p|. \quad (12.11)$$

(Здесь знак \approx означает, что равенство соблюдается с точностью до импульса электрона в атоме, равного по порядку величины $\hbar/a \ll |p|$.)

Таким образом, акт возбуждения атома сопровождается локализацией микрочастицы в волновом пакете (12.9), так что возбуждение атома можно рассматривать как переход частицы из состояния плоской волны $e^{ipQ/\hbar}$ при $t=0$ в локализованное состояние $\psi_n(Q)$, определяемое выражением (12.9) при $0 \leq t \leq 1/\Omega_n$. При $t \rightarrow \infty$ образовавшийся пакет расплывается. Однако если возбуждение атома инициирует химическую или другую реакцию, то необходимо включить в рассмотрение эту цепь явлений, ведущую в конечном акте к макроскопическому событию. Состояние при $t \rightarrow \infty$ не будет тогда сводиться к расплыванию пакета, а будет описывать новое состояние,

возникшее в результате процесса возбуждения атома с последующей химической реакцией.

Б. Косвенное измерение координаты микрочастицы. Обратимся теперь к косвенному измерению координаты

микрочастицы. Для этого рассмотрим сперва теорию луча, который должен служить щупом для измерения координаты микрочастицы, находящейся в связанном состоянии, например координаты внутриатомного электрона.

На рис. 13 показан экран Э—Э с диафрагмой Д. Эта диафрагма формирует пучок микрочастиц, имеющих энергию $E = p^2/2m = \hbar\omega$, импульс $p = \hbar k$. Суперпозиция плоских волн, имеющих заданную полную энергию, но различные направления распространения, имеет вид

$$\psi = \int A(\alpha) \exp \{ ikr [\cos \vartheta \cos \alpha + \sin \vartheta \sin \alpha \times \cos(\varphi - \beta)] - i\omega t \} \sin \alpha d\alpha d\beta, \quad (12.12)$$

Рис. 13. Дифракция узкого пучка. Э—Э—поглощающий экран; Д—диафрагма диаметром a ; Δ_{\perp} —ширина пучка на расстоянии r от диафрагмы;

$$\Delta_{\perp}^2 = a^2 + \frac{\lambda^2}{a^2} r^2.$$

где r , ϑ , φ суть полярные координаты радиуса-вектора \mathbf{r} ; α, β —полярные углы волнового вектора \mathbf{k} . Интегрируя по углу $d\beta$, находим

$$\psi = \int A(\alpha) \sin \alpha d\alpha \exp \{ ikr \cos \vartheta \cos \alpha - i\omega t \} \times J_0(kr \sin \vartheta \sin \alpha) \quad (12.13)$$

(здесь $J_0(x)$ —функция Бесселя нулевого порядка); при $\vartheta = \pi/2$ мы получаем значение волнового поля на поверхности экрана. Это поле должно исчезать вне отверстия диафрагмы. Можно положить $f(r) = Be^{-r^2/a^2}$ в качестве простейшей аппроксимации, выражающей непрозрачность экрана для $r > a$. В интеграле (12.13) существенную роль играют только малые углы, поэтому мы можем

аппроксимировать его с помощью формулы

$$\psi = e^{ikz - i\omega t} \int_0^\infty A(\alpha) \alpha d\alpha \exp\left(-ikz \frac{\alpha^2}{2}\right) J_0(kr \sin \vartheta \cdot \alpha). \quad (12.14)$$

При $z=0$ имеем

$$Be^{-r^2/a^2} = \int_0^\infty J_0(kr\alpha) A(\alpha) \alpha d\alpha, \quad (12.15)$$

откуда *)

$$A(\alpha) = \frac{Bk^2 a^2}{4\pi} \exp\left(-\frac{k^2 a^2 \alpha^2}{4}\right). \quad (12.16)$$

Подставляя это выражение для $A(\alpha)$ в формулу (12.14) и пользуясь опять обращением (12.15), получим, что при больших r и малых ϑ интенсивность волн в пучке $|\psi|^2$ равна

$$|\psi|^2 = \left(\frac{kBa^2}{2r}\right)^2 \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{a^2}{\lambda^2} \theta^2\right). \quad (12.17)$$

Из этой формулы следует, что пучок частиц, выходящий из отверстия радиуса a , расширяется благодаря дифракции, и притом таким образом, что квадрат его поперечных размеров $\rho^2 = r^2 \theta^2$ определяется средней величиной:

$$\Delta_\perp^2 = \frac{\lambda^2 r^2}{a^2}. \quad (12.18)$$

Если представить себе этот процесс во времени, полагая $r = vt = pt/m$, то найдем, что

$$\Delta_\perp^2 = \frac{\hbar^2}{m^2 a^2} t^2 \quad (12.19)$$

в соответствии с ранее полученным результатом для расширения волнового пакета в поперечном направлении. Для того чтобы пучок являлся хорошим зондом, необходимо, чтобы его ширина Δ_\perp была существенно меньше размеров системы d , внутри которой изучается положение микрочастицы, т. е. с учетом начальных размеров имеем условие

$$a^2 + \frac{\lambda^2 r^2}{a^2} \ll d^2 \quad (12.20)$$

*) См., например, [35].

или, при $a \ll d$,

$$\frac{d}{\lambda} \gg \frac{r}{a}. \quad (12.20')$$

Эти условия являются крайне жесткими и, если иметь в виду реальные объекты, практически неосуществимыми. Действительно, не видно путей для создания щели или другого устройства для получения пучка шириной $a < d$, если под d разумеать атомные размеры. Однако теория формально допускает как угодно узкие щели и поэтому внутренне непротиворечива. Имея это в виду, рассмотрим взаимодействие микрочастицы, находящейся в связанном состоянии, с микрочастицами пучка, служащего зондом для определения положения первой связанной частицы. Пусть масса первой частицы есть m , ее координата \mathbf{x} , собственные функции $\psi_n(\mathbf{x})$, E_n — соответствующие уровни энергии. Эти функции удовлетворяют уравнению

$$\hat{H}_m(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) = E_n \psi_n(\mathbf{x}), \quad (12.21)$$

где $\hat{H}_m(\mathbf{x})$ — оператор Гамильтона, описывающий динамику связанной частицы. Пусть масса частицы пучка-зонда есть μ , ее координата \mathbf{Q} , оператор импульса \hat{P} . Тогда ее гамильтониан есть попросту

$$\hat{H}_\mu(\mathbf{Q}) = \frac{\hat{P}^2}{2\mu}. \quad (12.22)$$

Положим опять, как в § 11, что взаимодействие m -частицы и μ -частицы — точечное, т. е.

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) = g\delta(\mathbf{x} - \mathbf{Q}), \quad (12.23)$$

где g — константа взаимодействия. Волновая функция m -частицы вместе с пучком-зондом $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{Q})$ будет удовлетворять уравнению Шредингера

$$[\hat{H}_m(\mathbf{x}) + \hat{H}_\mu(\mathbf{Q}) + W(\mathbf{x} - \mathbf{Q})] \psi(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) = E \psi(\mathbf{x}, \mathbf{Q}). \quad (12.24)$$

Представим $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{Q})$ в виде

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{Q}) = \psi_0(\mathbf{x}) u_0(\mathbf{Q}) + \sum_{n \neq 0} \psi_n(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{Q}), \quad (12.25)$$

где $\psi_0(\mathbf{x})$ описывает состояние m -частицы до взаимодействия, $u_0(\mathbf{Q})$ описывает пучок μ -частиц вместе с упруго рассеянной волной. Подставим эту функцию в (12.24) и

после скалярного умножения на $\psi_m^*(\mathbf{x})$ найдем систему уравнений для функций $u_m(\mathbf{Q})$:

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2\mu} + (E_m - E) \right] u_m(\mathbf{Q}) = -g\psi_0(\mathbf{Q})\psi_m^*(\mathbf{Q})u_0(\mathbf{Q}), \quad (12.26)$$

причем мы пренебрегли произведением $W \sum_{n \neq 0} \psi_n(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{Q})$, как величиной второго порядка малости (при малой g). Для упругого рассеяния, описываемого $u_0(\mathbf{Q})$, имеем согласно (12.26):

$$(\nabla^2 + k^2) u_0(\mathbf{Q}) = -\frac{2\mu g}{\hbar^2} |\psi_0(\mathbf{Q})|^2 u_0(\mathbf{Q}) = \rho(\mathbf{Q}), \quad (12.27)$$

где $k^2 = 2\mu E / \hbar^2$. Отсюда известными методами находим *)

$$u_0(\mathbf{Q}) = \varphi_0(\mathbf{Q}) + \int \mathfrak{G}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}') \rho(\mathbf{Q}') d\mathbf{Q}', \quad (12.28)$$

где функция $\varphi_0(\mathbf{Q})$ описывает исходный узкий пучок (см. формулу (12.12)), а функция $u_0(\mathbf{Q})$ описывает этот пучок вместе с рассеянной волной; $\mathfrak{G}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}')$ есть функция Грина однородного уравнения (12.27):

$$\mathfrak{G}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}') = \frac{-e^{ik|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'|}}{4\pi |\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'|}, \quad (12.29)$$

а величина $\rho(\mathbf{Q})$ равна

$$\rho(\mathbf{Q}) = -\frac{2\mu g}{\hbar^2} |\psi_0(\mathbf{Q})|^2 \varphi_0(\mathbf{Q}). \quad (12.30)$$

Если обратиться к большим расстояниям от области рассеяния $|\mathbf{Q}| = r \rightarrow \infty$, то формула (12.28) приводит к известному результату **)

$$u_0(\mathbf{Q}) = \varphi_0(\mathbf{Q}) + \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} A(\mathbf{q}), \quad (12.28')$$

где амплитуда рассеянной волны $A(\mathbf{q})$ равна

$$A(\mathbf{q}) = \int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{Q}} \rho(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q}; \quad (12.31)$$

здесь вектор $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ есть передаваемый при рассеянии импульс.

Из формулы (12.28) видно, что источником рассеянных волн является область, где плотность $\rho(\mathbf{Q})$ существенно

*) См., например, [28], гл. XIII.

**) См., например, [28].

отлична от нуля. Эта область есть область пересечения пучка-зонда μ -частиц $\psi_0(Q, t)$ с областью локализации m -частицы. Эта область определяется поведением функции $|\psi_0(Q)|^2$.

Следовательно, область, где $\rho(Q)$ существенно отлична от нуля, имеет определенные координаты в плоскости

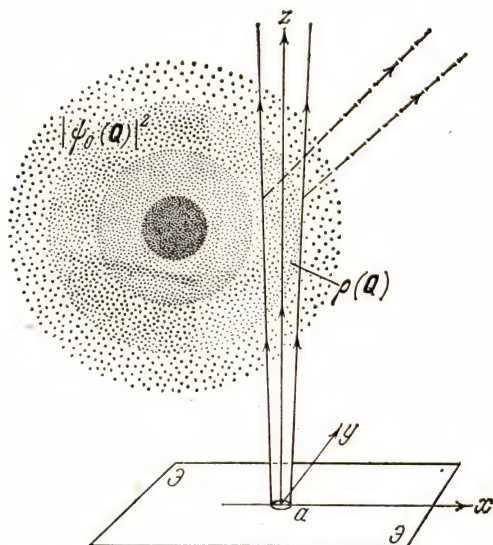


Рис. 14. Определение координаты в косвенном опыте. Э—Э—поглощающий экран, a —диаметр диафрагмы, с помощью которой создается узкий пучок-зонд.

(x, y) (с точностью до ширины пучка a) и одну неопределенную координату z , направленную вдоль пучка (рис. 14). Если теперь с помощью какого-либо детектора мы фиксируем рассеянную атомом μ -частицу, то тем самым будет доказано, что в момент рассеяния m -частица имела координаты x, y , равные координатам диафрагмы, ограничивающей пучок μ -частиц, с точностью до ширины пучка $\Delta x, \Delta y \approx a$. Следует заметить, что это утверждение было бы совсем точным, если бы пучок имел резкую границу. На самом деле такой границы не существует и имеется конечная вероятность того, что μ -частица рассеивается на m -частице, находясь вдали от оси пучка, на расстоянии,

большем a . Далее, из-за диффузности границы атома m -частица может оказаться весьма далеко от центра атома, в той области, где пучок-зонд расширился настолько, что его размеры $\Delta_{\perp} \gg a$.

Итак, даже в этом мысленном опыте, допускающем узкую щель и точечное взаимодействие, суждение об истинной координате, связанной в атоме m -частицы, может быть только вероятностным.

Строгая постановка вопроса была бы такая: найдена рассеянная μ -частица; какова вероятность того, что она рассеяна m -частицей, находящейся в некоторой резко ограниченной области $\Omega(\mathbf{x})$? Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что величиной, определяющей полную вероятность какого-либо упругого рассеяния μ -частицы связанной m -частицей, является интеграл

$$I = \int |A(\mathbf{q})|^2 d^3q, \quad (12.32)$$

где $A(\mathbf{q})$ — амплитуда рассеянной волны (12.31). Величина I (12.32) измеряет в условных единицах полный поток упруго рассеянных μ -частиц.

С помощью (12.31) этот интеграл можно переписать в виде

$$I = \frac{1}{(4\pi)^2} \int \rho(\mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}'') \Delta(\mathbf{q}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}'') d^3x' d^3x'', \quad (12.33)$$

где функция $\Delta(\mathbf{q}, \mathbf{x})$ ($\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}''$) определяется формулой

$$\Delta(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = \frac{\sin Q_1 x}{x} \frac{\sin Q_2 y}{y} \frac{\sin Q_3 z}{z}, \quad (12.34)$$

а Q_1, Q_2, Q_3 — максимальные значения проекций вектора \mathbf{q} на оси координат. Из выражения (12.33) видно, что вероятность упругого рассеяния I нельзя представить как сумму вкладов от отдельных пространственных областей, а она определяется суммой корреляций.

Однако если длина волны λ пучка-зонда мала по сравнению с областью вариаций величины $\rho(\mathbf{x})$, то пределы интегрирования по q_x, q_y, q_z можно заменить на $\pm\infty$; это эквивалентно замене функции $\Delta(\mathbf{q}, \mathbf{x})$ на функцию $\delta(\mathbf{x})$. Тогда вместо (12.33) получаем

$$I \approx \frac{1}{(4\pi)^2} \int \rho^2(\mathbf{x}) d^3x \quad (12.35)$$

и вероятность того, что рассеяние произошло в области Ω , можно представить в виде

$$I(\Omega) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\Omega} \rho^2(\mathbf{x}) d^3x. \quad (12.36)$$

В этих расчетах мы предполагали, что взаимодействие μ -частицы и m -частицы является точечным (см. (12.23)). Если оно не точечное, то определить вероятность $I(\Omega)$ в области Ω меньшей сферы взаимодействия вообще невозможно. Действительно, заменяя в (12.23) $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{Q})$ на распределенную функцию взаимодействия $V(\mathbf{x}-\mathbf{Q})$, так что

$$W(\mathbf{x}-\mathbf{Q}) = gV(\mathbf{x}-\mathbf{Q}), \quad (12.23')$$

и повторяя выкладки, ведущие к уравнению (12.27), получим вместо (12.27)

$$(\nabla^2 + k^2) u_0(\mathbf{Q}) = \rho_V(\mathbf{Q}), \quad (12.27')$$

где

$$\rho_V(\mathbf{Q}) = \frac{2\mu g}{\hbar^2} \int V(\mathbf{x}-\mathbf{Q}) |\psi_0(\mathbf{x})|^2 \psi_0(\mathbf{Q}) d^3x. \quad (12.30')$$

Отсюда следует, что

$$I_V = \frac{1}{4\pi} \int \rho_V(\mathbf{x}') \rho_V(\mathbf{x}'') \Delta(\mathbf{q}, \mathbf{x}' - \mathbf{x}'') d^3x' d^3x'', \quad (12.33')$$

или при $\lambda \rightarrow 0$, $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$ получаем, аналогично (12.35),

$$I_V = \frac{1}{(4\pi)^2} \int \rho_V^2(\mathbf{x}) d^3x. \quad (12.34')$$

Формально можно ввести, как и прежде, величину

$$I_V(\Omega) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\Omega} \rho_V^2(\mathbf{x}) d^3x. \quad (12.35')$$

Однако из (12.30) видно, что величина $\rho_V^2(\mathbf{x})$ нелокально связана с функцией $|\psi_0(\mathbf{x})|^2$, так что в интеграле (12.35) имеется вклад и от тех областей пространства, где величина $|\psi_0(\mathbf{x})|^2$ равна нулю. Интерпретация интеграла (12.35) может быть сохранена в том случае, если $|\psi_0(\mathbf{x})|^2$ весьма гладко распределена внутри масштабов, определяющих сферу взаимодействия, т. е. область, вне которой потенциал взаимодействия $V(\mathbf{x}-\mathbf{Q})$ пренебрежимо мал.

§ 13. Косвенное измерение координаты микрочастицы в данный момент времени

До сих пор измерение координаты x микрочастицы относилось к неопределенному промежутку времени. Для того чтобы измерить координату x для определенного малого интервала времени Δt , необходимо усложнить работу диафрагмы в мысленном опыте формирования пучка-зонда. Необходимо допустить, что имеется возможность открыть эту диафрагму в некоторый момент времени, скажем при $t=0$, и закрыть ее вновь в момент $t=\Delta t$. Тогда вместо луча, показанного на рис. 14, возникнет пакет, ограниченный не только по осям Ox и Oy , но и в направлении своего движения по оси Oz .

Этот пакет будет расплываться в соответствии с формулами, приведенными в § 11. Итак, теперь вместо зонда-пучка μ -частиц мы будем применять зонд-пакет μ -частиц. Такой волновой зонд-пакет может быть представлен суперпозицией плоских волн, распространяющихся преимущественно в направлении Oz (см. рис. 14). В соответствии со сказанным волновую функцию μ -частиц, с помощью которых мы намерены зондировать положение m -частицы, связанной внутри микросистемы, представим в виде

$$\varphi_0(\mathbf{Q}, t) = \int C(\mathbf{p}) \exp\left(-i \frac{(Et - \mathbf{p}\mathbf{Q})}{\hbar}\right) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}}, \quad (13.1)$$

где

$$C(\mathbf{p}) = \frac{\exp\{-b^2[p_x^2 - p_y^2 - (p_z - p)^2]\}}{b^{3/2}\pi^{3/4}}. \quad (13.2)$$

Здесь p — средний импульс в направлении движения пакета (по оси Oz), величина $1/b^2$ есть мера среднего квадратичного отклонения проекций импульса $\overline{\Delta P_x^2}$, $\overline{\Delta P_y^2}$, $\overline{\Delta P_z^2}$. Пользуясь методом расчета, изложенным в § 11, при достаточно большом параметре b функцию $\varphi_0(\mathbf{Q}, t)$ можно привести к виду

$$\varphi_0(\mathbf{Q}, t) = \frac{e^{i(\omega t - k\xi)}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} f(\mathbf{Q}, t), \quad (13.3)$$

где функция $f(\mathbf{Q}, t)$ равна

$$f(\mathbf{Q}, t) = \exp\left[-\frac{\xi^2 + \eta^2}{\Delta_{\perp}^2} - \frac{(\xi - vt)^2}{\Delta_{\parallel}^2}\right]. \quad (13.4)$$

В этих формулах $\omega = \frac{E}{h}$; $E = \frac{p^2}{2\mu}$ есть средняя энергия μ -частиц; P — их средний импульс, направленный по оси $O\xi$; $k = p/\hbar$ — волновой вектор; $v = p/\mu$ — средняя скорость по оси $O\xi$; Δ_{\perp}^2 , Δ_{\parallel}^2 — средние ширины волновых пакетов в поперечном и соответственно в параллельном μ -пучку направлениях. В соответствии с (11.22) имеем

$$\Delta_{\perp}^2 = \Delta_{\parallel}^2 = a^2 + \frac{\hbar^2}{\mu^2 a^2} t^2, \quad (13.5)$$

где $a^2 \approx \hbar^2/b^2$. Пусть, как и в § 12, гамильтониан m -частицы есть $\hat{H}_m(\mathbf{x})$, а гамильтониан μ -частицы есть $\hat{H}_{\mu}(\mathbf{Q})$ (см. формулы (12.21) и (12.22)). Тогда уравнение Шредингера для волновой функции $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{Q}, t)$ системы « m -частица + волновой пакет μ -частицы» запишется в виде

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = [\hat{H}_m(\mathbf{x}) + \hat{H}_{\mu}(\mathbf{Q}) + W(\mathbf{x} - \mathbf{Q})] \Psi, \quad (13.6)$$

где W есть энергия взаимодействия m -частиц и μ -частиц. Это взаимодействие мы будем считать точечным (см. формулу (12.23)). Представим теперь функцию $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{Q}, t)$ в виде

$$\Psi = \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{Q}, t) \exp\left(-i \frac{E_0 t}{\hbar}\right), \quad (13.7)$$

где E_0 есть энергия m -частицы в состоянии $\psi_0(\mathbf{x})$. Функция $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{Q}, t)$ может быть представлена в виде суммы:

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{Q}, t) = \psi_0(\mathbf{x}) \varphi_0(\mathbf{Q}, t) + u(\mathbf{x}, \mathbf{Q}, t), \quad (13.8)$$

где $u(\mathbf{x}, \mathbf{Q}, t)$ — рассеянная волна, а $\psi_0(\mathbf{x}) \varphi_0(\mathbf{Q}, t)$ — волна первичная. Представляя, далее, $u(\mathbf{x}, \mathbf{Q}, t)$ в виде ряда

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{Q}, t) = \sum_n u_n(\mathbf{Q}, t) \psi_n(\mathbf{x}) \quad (13.9)$$

по собственным функциям $\psi_n(\mathbf{x})$ оператора Гамильтона \hat{H}_m m -частицы, мы найдем обычным путем (ср. § 12) систему уравнений для функций u_n :

$$i\hbar \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} u_m + g \psi_0(\mathbf{Q}) \psi_m^*(\mathbf{Q}) \varphi_0(\mathbf{Q}, t), \quad (13.10)$$

аналогичную системе (12.26)*). В частности, для упругого рассеяния получим

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hat{p}^2}{2\mu} \right) u_0 = g |\psi_0(Q)|^2 \varphi_0(Q, t). \quad (13.11)$$

Чтобы найти решение этого уравнения, заметим, что уравнение для функции Грина \mathfrak{G} однородного уравнения (13.11) гласит:

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hat{p}^2}{2\mu} \right) \mathfrak{G} = -\delta(Q - Q') \delta(t - t'), \quad (13.12)$$

и имеет известное решение [29, 36]:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{(t - t')^{3/2}} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{(Q - Q')^2}{2(t - t')^2} \right) \text{ для } t > t'. \quad (13.13)$$

$$\mathfrak{G} = 0 \quad \text{для } t < t'. \quad (13.13')$$

Поэтому решение неоднородного уравнения (13.11) может быть представлено в виде

$$u_0(Q, t) = \varphi_0(Q, t) + \alpha \int_t^\infty \frac{\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(Q - Q')^2}{(t - t')^2} \right)}{(t - t')^{3/2}} |\psi_0(Q')|^2 \varphi_0(Q', t') d^3 Q' dt', \quad (13.14)$$

где в коэффициенте α объединены все постоянные множители.

Функция $u_0(Q, t)$ описывает упруго рассеянные μ -частицы. Рассмотрим теперь случай, когда размеры μ -пакета продольные Δ_{\parallel} и поперечные Δ_{\perp} велики по сравнению с основной длиной волны $\lambda = \hbar/p$. В этом случае изменение показателя экспоненты функции $f(Q, t)$ (13.4) за время периода колебаний $\approx \hbar/E$, очень мало, и мы можем выполнить интегрирование по dt' в (13.4), учитывая зависимость функции $\varphi_0(Q, t)$ от t' только через множитель $e^{-iEt'/\hbar} = e^{-i\omega t'}$. Вводя обозначение $\tau = t' - t$ в (13.4), применим к показателю экспоненты в (13.4) метод пере-

*) При этом мы опять предполагаем малость константы взаимодействия g .

вала. Интеграл, который необходимо взять, имеет теперь вид

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-iF(\tau)}}{\tau^{3/2}} d\tau, \quad (13.15)$$

где

$$F(\tau) = \frac{\Delta^2}{4D\tau} + \omega\tau \quad (13.16)$$

и $4D = 2\hbar/\mu$, $\Delta^2 = |\mathbf{Q}' - \mathbf{Q}|^2$. Приравнивая нулю $dF(\tau)/d\tau$, найдем

$$\tau_m = \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4D\omega}} = \pm \frac{|\mathbf{Q}' - \mathbf{Q}|}{v}, \quad (13.17)$$

причем знак минус соответствует запаздывающему, а знак плюс — опережающему действию. Это соотношение указывает на то, что рассеянная волна приходит из точки \mathbf{Q}' в точку \mathbf{Q} за время τ_m , определяемое скоростью μ -частиц $v = \hbar k/\mu$. Замечая, что $d^2F(\tau)/d\tau^2$ равна

$$F''(\tau_m) = \frac{\Delta^2}{2D\tau_m^3} = \frac{v^3}{2D|\mathbf{Q}' - \mathbf{Q}|}, \quad (13.18)$$

найдем, что

$$I = \beta \frac{e^{+ik|\mathbf{Q}' - \mathbf{Q}|}}{|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'|}, \quad (13.19)$$

где β — постоянный коэффициент. Возвращаясь теперь к формуле (13.14), получим

$$u_0(\mathbf{Q}, t) = \varphi_0(\mathbf{Q}, t) + \alpha' \int \frac{e^{ik|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'| - i\omega t}}{|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'|} \rho\left(\mathbf{Q}', t - \frac{|\mathbf{Q} - \mathbf{Q}'|}{v}\right) d^3Q', \quad (13.20)$$

где α' — некоторый новый коэффициент, а функция $\rho(\mathbf{Q}, t)$ равна

$$\rho(\mathbf{Q}, t) = \frac{2\mu g}{\hbar^2} |\psi_0(\mathbf{Q})|^2 \varphi_0(\mathbf{Q}, t) e^{ikz} \quad (13.21)$$

и отличается от прежнего результата (12.28) только зависимостью от времени пакета волн $\varphi_0(\mathbf{Q}, t)$. Эта зависимость позволяет говорить о том моменте времени, когда

в акте рассеяния μ -частицы измеряется координата m -частицы.

Если, как это было сделано в § 12, рассмотреть большие расстояния, т. е. $|Q| = r \rightarrow \infty$, то из (13.20) получается

$$u_0(Q, t) = \varphi_0(Q, t) + \frac{e^{ikr}}{4\pi r} A(q, Q, t), \quad (13.22)$$

где амплитуда рассеянной волны $A(q, Q, t)$ равна

$$A(q, Q, t) = \int e^{iqQ'} \rho\left(Q', t - \frac{|Q' - Q|}{v}\right) d^3Q' \quad (13.23)$$

и отличается от (12.31) запаздывающей зависимостью от времени.

Вычисляя теперь полную интенсивность I интегрированием $|A(q, Q, t)|^2$ по d^3q в предположении очень коротких волн ($\lambda \rightarrow 0$), мы получим вместо (12.36)

$$I(\Omega, Q, t) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\Omega} \rho^2\left(Q', t - \frac{|Q' - Q|}{v}\right) d^3Q'. \quad (13.24)$$

В этой формуле, в отличие от (12.36), указывается момент времени $t' = t - \frac{|Q' - Q|}{v}$, когда произошло рассеяние, причем Q есть радиус-вектор точки наблюдения, а Q' — радиус-вектор области Ω , внутри которой произошло рассеяние.

Величина $I(\Omega, Q, t)$ есть мера вероятности того, что наблюдаемая в точке в момент t рассеянная μ -частица возникла в результате рассеяния в области Ω в момент времени $t' = t - \frac{|Q - Q'|}{v}$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ В МИКРОМИРЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ СЛУЧАЕ

§ 14. Фермионное поле

Поле свободных фермионов описывается четырехкомпонентным спинорным оператором $\hat{\psi}(x)$. Этот оператор и сопряженный ему оператор $\bar{\hat{\psi}}(x)$ подчиняются уравнениям Дирака

$$\left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + m\right) \hat{\psi} = 0, \quad (14.1)$$

$$\bar{\hat{\psi}} \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m\right) = 0; \quad (14.1')$$

x_{μ} ($\mu = 1, 2, 3, 4$) суть компоненты четырехмерного радиуса-вектора произвольной точки P . Они определены следующим образом: $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x_4 = ict$. Здесь, как обычно, t — действительное время, c — скорость света, а γ_{μ} — известные матрицы Дирака:

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (14.2)$$

Компоненты спиноров $\hat{\psi}$ и $\bar{\hat{\psi}}$ подчинены правилам коммутации

$$\{\hat{\psi}_{\alpha}(x), \hat{\psi}_{\beta}(x)\} = 0, \quad \{\bar{\hat{\psi}}_{\alpha}(x), \bar{\hat{\psi}}_{\beta}(x')\} = 0, \quad (14.3)$$

$$\{\hat{\psi}_{\alpha}(x), \bar{\hat{\psi}}_{\beta}(x')\} = iS_{\alpha\beta}(x-x'), \quad (14.3')$$

$\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4,$

где скобки $\{A, B\}$ означают антикоммутатор $AB + BA$.

Далее, функция $S_{\alpha\beta}(x-x')$ есть матричный элемент перестановочной функции $S(x-x')$, равный *)

$$S_{\alpha\beta}(x-x') = - \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m\right)_{\alpha\beta} D(x-x'), \quad (14.4)$$

*) См. дополнение I, формулы (1.3), (I.15).

где

$$D(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ipx} \frac{i \sin Et}{E} d^3p. \quad (14.5)$$

В этой формуле \mathbf{p} есть вектор импульса, E — энергия, равная $E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

Если в качестве фундаментальной системы функций взять плоские волны e^{ipx} ($px \equiv \mathbf{p}\mathbf{x} - Et$), то спиноры $\hat{\psi}$ и $\bar{\hat{\psi}}$ могут быть представлены в виде

$$\hat{\psi} = \sum_{r=1,2} \int d^3p \{ \hat{a}_r(\mathbf{p}) u^r(\mathbf{p}) e^{ipx} + \hat{b}_r^+(\mathbf{p}) v^r(-\mathbf{p}) e^{-ipx} \}, \quad (14.6)$$

$$\bar{\hat{\psi}} = \sum_{r=1,2} \int d^3p \{ \hat{a}_r^+ \bar{u}^r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + \hat{b}_r(\mathbf{p}) \bar{v}^r(-\mathbf{p}) e^{ipx} \}. \quad (14.6')$$

Здесь $u^r(\mathbf{p})$, $v^r(-\mathbf{p})$ — спинорные амплитуды плоской волны. Они удовлетворяют уравнениям Дирака

$$(i\hat{p} + m) u(\mathbf{p}) = 0, \quad (14.7)$$

$$(-i\hat{p} + m) v(-\mathbf{p}) = 0 \quad (14.7')$$

(оператор $\hat{p} = \gamma_\mu p_\mu$, $p_\mu = (\mathbf{p}, E/c)$) и нормированы в соответствии с уравнениями

$$\sum_{\alpha=1}^4 u_\alpha^r(\mathbf{p}) u_\alpha^{r'}(\mathbf{p})^* = \delta_{rr'}, \quad (14.8)$$

$$\sum_{\alpha=1}^4 v_\alpha^r(-\mathbf{p}) v_\alpha^{r'}(-\mathbf{p})^* = \delta_{rr'}. \quad (14.8')$$

Четырехкомпонентный спинор $u^r(\mathbf{p}) e^{ipx}$ означает волну, описывающую отрицательно заряженный фермион (электрон) с импульсом \mathbf{p} , энергией $E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ и ориентацией спина, определяемой индексом r ($=1, 2$). Волна $v^r(-\mathbf{p}) e^{-ipx}$ описывает положительно заряженный фермион (позитрон) с импульсом \mathbf{p} , энергией $E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ и спином r . Операторные свойства спиноров $\hat{\psi}$ и $\bar{\hat{\psi}}$ перенесены на амплитуды \hat{a} , \hat{a}^+ , \hat{b} , \hat{b}^+ , которые являются операторами, подчиняющимися условиям антикоммутации:

$$\{ \hat{a}_r(\mathbf{p}), \hat{a}_{r'}^+(\mathbf{p}') \} = \delta_{rr'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (14.9)$$

$$\{ \hat{b}_r(\mathbf{p}), \hat{b}_{r'}^+(\mathbf{p}') \} = \delta_{rr'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'); \quad (14.9')$$

все остальные (антикоммутаторы операторов \hat{a} , \hat{a}^+ , \hat{b} , \hat{b}^+) равны нулю.

Эти правила коммутации обеспечивают выполнение правил коммутации для операторов $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ и $\bar{\hat{\psi}}(\mathbf{x})$ (14.3), (14.3').

Физический смысл операторов \hat{a} , \hat{a}^+ , \hat{b} , \hat{b}^+ таков.

Оператор $\hat{a}_r(\mathbf{p})$, действуя на функционал Ψ , описывающий состояние фермионного квантованного поля, уменьшает число электронов $\hat{n}_r(\mathbf{p})$ в состоянии (\mathbf{p}, r) на единицу:

$$\hat{a}_r(\mathbf{p}) \Psi(\dots, n_r(\mathbf{p}), \dots) = \Psi(\dots, n_r(\mathbf{p}) - 1, \dots), \quad (14.10)$$

а оператор $\hat{a}_r^+(\mathbf{p})$ порождает электрон в состоянии (\mathbf{p}, r) :

$$\hat{a}_r^+(\mathbf{p}) \Psi(\dots, n_r(\mathbf{p}), \dots) = \Psi(\dots, n_r(\mathbf{p}) + 1, \dots). \quad (14.10')$$

Операторы \hat{b} , \hat{b}^+ имеют то же значение для позитрона:

$$\hat{b}_r(\mathbf{p}) \Psi(\dots, n_r^+(\mathbf{p}), \dots) = \Psi(\dots, n_r^+(\mathbf{p}) - 1, \dots), \quad (14.10'')$$

$$\hat{b}_r^+(\mathbf{p}) \Psi(\dots, n_r^+(\mathbf{p}), \dots) = \Psi(\dots, n_r^+(\mathbf{p}) + 1, \dots). \quad (14.10''')$$

Заметим, что в силу статистики Ферми—Дирака числа заполнения $n_r(\mathbf{p})$ ограничиваются значениями 0 и 1*).

Из уравнений (14.1) и (14.1') следует закон сохранения для электрического тока:

$$\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad (14.11)$$

причем компоненты этого тока определяются формулой

$$J_\mu = ie\bar{\hat{\psi}}\gamma_\mu\hat{\psi}, \quad (14.12)$$

где e — заряд электрона.

Четвертая компонента этого тока:

$$J_4 = i\rho = ie\bar{\hat{\psi}}\gamma_4\hat{\psi} \quad (14.13)$$

может иметь различный знак в зависимости от того, электроны или позитроны дают больший вклад в плотность электрического заряда в данном месте.

*) Подробности о квантовании дираковского поля можно найти в курсах квантовой теории поля. Мы здесь следуем обозначениям, принятым в [37, 38].

Однако если обратиться к одночастичному состоянию, то величина p имеет определенный знак и после деления на заряд частицы e может рассматриваться как плотность вероятности $w(x)$ найти частицу в данном месте x в момент времени t .

Чтобы доказать это важное обстоятельство, обратимся к рассмотрению одночастичного состояния, например электрона. Это состояние в общем случае будет состоянием с неопределенным импульсом p и неопределенной ориентацией спина r . Функционал, описывающий такие состояния, имеет вид

$$\Psi(1) = \sum_{r'=1,2} \int c_{r'}(p') \delta(n_{p'}^{r'} - 1) \prod_{\substack{p \neq p' \\ r \neq r'}} \delta(n_p^r) d^3 p'. \quad (14.14)$$

Матричный элемент оператора фермионного поля $\hat{\psi}$, соответствующий переходу из состояния вакуума $\Psi(0)$ в состояние $\Psi(1)$, на основании (14.6), (14.10) — (14.10''') и (14.11) будет равна

$$\psi(x) = \langle \Psi(0) | \psi(x) | \Psi(1) \rangle = \int c_r(p) d^3 p u^r(p) e^{ipx} \quad (14.15)$$

и описывает волновой пакет фермиона с ориентацией спина r , с импульсами, определенными амплитудой $c(p)$, и положительной энергией $E = +\sqrt{p^2 + m^2}$.

Нормировка функционала поля Ψ :

$$\langle \Psi(1), \Psi(1) \rangle = 1, \quad (14.16)$$

ведет к условию нормировки для амплитуды $c(p)$:

$$\int c^*(p) c(p) d^3 p = 1. \quad (14.17)$$

Рассмотренный матричный элемент оператора $\hat{\psi}(x)$ поля (14.15) имеет смысл волновой функции электрона $\psi(x)$ в дираковской теории одного электрона.

Вычислим теперь среднее значение четвертой компоненты тока J_4 или, что удобнее, величину $w = J_4 / ie$ в одночастичном состоянии $\Psi(1)$ (14.11). На основании (14.13) и (14.15) имеем

$$\begin{aligned} w(x) &= \langle \Psi(1) | \bar{\psi} \gamma_4 \hat{\psi} | \Psi(1) \rangle = \\ &= \bar{\psi}(x) \gamma_4 \psi(x) \equiv \psi^*(x) \psi(x) = \sum_{\alpha=1}^4 \psi_{\alpha}^*(x) \psi_{\alpha}(x) \geq 0. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Положительная дефинитность величины $w(x)$ позволяет рассматривать ее как плотность вероятности для одночастичного состояния. В силу закона сохранения (14.11) полная вероятность

$$W = (\psi, \psi) = \int \bar{\psi} \gamma_4 \psi d^3x = \int w(x) d^3x \quad (14.19)$$

остается постоянной во времени:

$$\frac{dW}{dt} = \int \frac{\partial w}{\partial t} d^3x = - \int \operatorname{div} \mathbf{J} d^3x = - \int J_N d\sigma = 0. \quad (14.20)$$

В заключение заметим, что фундаментальные функции

$$\psi_{p,r}(x, \alpha) = \frac{\exp i(px - Et)}{(2\pi)^{3/2}} u_{\alpha}^r(p), \quad (14.21)$$

$$\psi_{p,r}(x, \alpha) = \frac{\exp i(px - Et)}{(2\pi)^{3/2}} v_{\alpha}^r(p) \quad (r = 1, 2), \quad (14.21')$$

входящие в разложения (14.6) и (14.6'), образуют полную систему функций, причем условие полноты при $t' = t$ гласит:

$$\sum_{r=1}^2 \sum_{u,v} \int d^3p \psi_{p,r}^*(x, \alpha) \psi_{p,r}(x', \beta) = \delta^3(x - x') \delta_{\alpha\beta}. \quad (14.22)$$

Здесь суммирование распространено по обеим ориентациям спина $r = 1, 2$ и двум знакам энергии (спиноры u и v). Если же мы ограничимся одним знаком энергии, например $E > 0$, и соответственно одним спинором u , то вместо (14.22) получим

$$\sum_{r=1}^2 \int d^3p \psi_{p,r}^*(x, \alpha) \psi_{p,r}(x', \alpha') = -i(\gamma_4 S_{\alpha\beta}^+(x - x')), \quad (14.23)$$

где

$$S_{\alpha\beta}^+(x - x') = -\left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - m\right) \Delta^+(x - x') \quad (14.24)$$

и

$$\Delta^+(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{-ipx}}{2E} d^3p. \quad (14.25)$$

Отсюда видно, что $\delta^3(x - x')$ не разлагается по фундаментальной системе функций $\psi_{p,r}(x, \alpha)$, если ограничиться состояниями только положительно частотными

(электроны) или только отрицательно частотными (позитроны).

То обстоятельство, что функция $S_{\alpha\beta}^+(x-x')$ размазана в области $\Delta x \sim \hbar/mc$, наводит на мысль, что дираковская частица вообще не может быть локализована точнее, нежели в пределах своей комптоновской длины волны. В следующем параграфе мы рассмотрим этот вопрос подробно.

§ 15. Соотношение неопределенностей для фермионов

Рассмотрим одночастичное состояние $\Psi(1)$. Для такого состояния мы можем применять обычное, некантованное уравнение Дирака для одного фермиона, с тем лишь важным ограничением, что мы обязаны использовать состояния только с одним знаком энергии $E = +\sqrt{p^2 + m^2} > 0$.

Волновая функция $\psi(x)$, описывающая такое состояние, может быть представлена в виде

$$\psi(x, t) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} c_r(p) u^r(p) e^{ipx}. \quad (15.1)$$

Мы будем считать ее квадратично интегрируемой. Вычислим среднее квадратичное отклонение какой-либо координаты, например z , в этом состоянии в какой-либо момент времени.

Без всяких ограничений, попросту выбором системы отсчета, мы можем предположить, что средние значения $\bar{z}=0$, $\bar{t}=0$ и средний импульс \bar{p} также равен нулю. Для простоты достаточно рассмотреть состояние с одной определенной ориентацией спина $r=1$ или $r=2$. В выбранной системе отсчета среднее значение квадратичного отклонения $\overline{\Delta z^2} \equiv \overline{(z - \bar{z})^2} = \overline{z^2}$ с помощью (14.18) запишется в виде

$$\overline{\Delta z^2} = \int \omega(x, t) z^2 d^3 x = \int \psi^*(x, t) z^2 \psi(x, t) d^3 x. \quad (15.2)$$

При условии нормировки

$$\int \omega(x, t) d^3 x = 1. \quad (15.3)$$

Выражение (15.2) может быть преобразовано с помощью соотношения

$$\begin{aligned} z\psi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} c(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}) \frac{\partial e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}}{\partial p_z} = \\ &= i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\partial [c(\mathbf{p}) u(\mathbf{p})]}{\partial p_z} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Записывая подобным же образом произведение $z\psi^*(\mathbf{x})$ и выполняя интегрирование по d^3x , найдем

$$\overline{\Delta z^2} = \int d^3p \frac{\partial [c(\mathbf{p}) u(\mathbf{p})]}{\partial p_z} \frac{\partial [c(\mathbf{p}) u^*(\mathbf{p})]}{\partial p_z} \quad (15.5)$$

или

$$\begin{aligned} \overline{\Delta z^2} &= \int d^3p \left| \frac{\partial c(\mathbf{p})}{\partial p_z} \right|^2 |u|^2 + \int d^3p |c(\mathbf{p})|^2 \left| \frac{\partial u}{\partial p_z} \right|^2 + \\ &+ \int d^3p \left\{ \frac{\partial c^*}{\partial p_z} c \frac{\partial u}{\partial p_z} u + c^* \frac{\partial c}{\partial p_z} \frac{\partial u}{\partial p_z} u + \frac{\partial c^*}{\partial p_z} c u^* \frac{\partial u}{\partial p_z} \right\}. \end{aligned} \quad (15.5')$$

Первый интеграл справа, как мы увидим, ведет к обычному соотношению неопределенностей; вторые два интеграла характерны для релятивистской теории и требуют специального исследования.

В принятой нами системе отсчета мы можем считать без существенных ограничений, что амплитуда $c(\mathbf{p})$ имеет вид

$$c(\mathbf{p}) = f\left(\frac{|\mathbf{p}|}{p_0}\right) \frac{1}{p_0^{3/2}}, \quad (15.6)$$

где функция $f(|\mathbf{p}|/p_0)$ действительна и убывает достаточно быстро для $|\mathbf{p}|/p_0 \gg 1$. Это означает, что величина p_0 характеризует разброс импульсов $\overline{\Delta p_z^2}$ в рассматриваемом состоянии; на самом деле,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta p_z^2} &= \overline{(p_z - \bar{p}_z)^2} = \bar{p}_z^2 = \int \frac{d^3p}{p_0^3} f^2\left(\frac{|\mathbf{p}|}{p_0}\right) p_z^2 = \\ &= p_0^2 \int \xi^4 d\xi \cos^2 \vartheta d\Omega f^2(\xi) = \alpha' p_0^2. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Здесь $p_z = |\mathbf{p}| \cos \vartheta$, $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, $\xi = \frac{|\mathbf{p}|}{p_0}$, α' — коэффициент порядка 1.

Для действительной амплитуды $c(\mathbf{p})$ формула (15.5') упрощается в силу нормировки спинора $u^+ u = 1$ (см. 14.8)).

Учитывая эту нормировку, получим

$$\overline{\Delta z^2} = \int d^3 p \left(\frac{\partial c(p)}{\partial p_z} \right)^2 + \int d^3 p c^2(p) \left| \frac{\partial u(p)}{\partial p_z} \right|^2. \quad (15.8)$$

Вводя теперь вместо $|p|$ переменную $\xi = |p|/p_0$, перепишем первый интеграл в (15.8) в виде

$$I_1 = \frac{1}{p_0^2} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 \xi^2 d\xi = \frac{\alpha''}{p_0^2} \quad (15.9)$$

(коэффициент α'' — порядка 1), а второй интеграл в виде

$$I_2 = \frac{1}{p_0^2} \frac{4\pi}{3} \int f^2(\xi) \xi^2 d\xi M\left(\xi, \frac{m}{p_0}\right), \quad (15.10)$$

где функция $M(\xi, m/p_0)$ определяется интегралом

$$M\left(\xi, \frac{m}{p_0}\right) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial u^*}{\partial p_z} \frac{\partial u}{\partial p_z} d\Omega. \quad (15.11)$$

Эта функция вычислена в дополнении II и равна

$$M\left(\xi, \frac{m}{p_0}\right) = \begin{cases} \frac{3p_0^2}{4m^2} & \text{для } \xi \ll \frac{m}{p_0}, \\ \frac{3p_0^2}{4m^2} 4 \frac{m^2}{p_0^2} & \text{для } \xi \gg \frac{m}{p_0}. \end{cases} \quad (15.12)$$

Ввиду этих свойств функции $M(\xi, m/p_0)$ мы имеем

$$I_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{m^2} \beta' & \text{для } \frac{m}{p_0} \ll 1, \\ \frac{4\pi}{p_0^2} \beta'' & \text{для } \frac{m}{p_0} \gg 1, \end{cases} \quad (15.13)$$

где β' и β'' — коэффициенты порядка 1.

Возвращаясь теперь к формуле (15.8) и восстанавливая в явной форме ее размерность, получим

$$\overline{\Delta z^2} = \alpha \frac{\hbar^2}{\Delta p_z^2} + \beta \frac{\hbar^2}{m^2 c^2} \quad \text{для } \overline{\Delta p_z^2} \ll m^2 c^2, \quad (15.14)$$

$$\overline{\Delta z^2} = \gamma \frac{\hbar^2}{\Delta p_z^2} \quad \text{для } \overline{\Delta p_z^2} \gg m^2 c^2. \quad (15.14')$$

Из этих формул, в которых α , β , γ суть численные коэффициенты порядка единицы, видно, что добавочные

релятивистские члены, обусловленные зависимостью спиноров от импульса, не являются существенными, так как в (15.14) добавочный член мал по сравнению с первым, а при $\overline{\Delta p_z^2} \gg m^2 c^2$ имеет место формула (15.14'), отличающаяся от старшего члена в (15.14) лишь численным коэффициентом. Из формулы (15.14) следует, что при $\overline{\Delta p_z^2} \rightarrow \infty$ величина разброса соответствующей координаты $\overline{\Delta z^2}$ может быть сделана как угодно малой.

Таким образом, хотя функция $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ не входит в класс функций, допустимых для одночастичного состояния, теория все же допускает возможность как угодно точно локализованных одночастичных состояний с определенным знаком энергии (в классе квадратично интегрируемых функций *).

§ 16. Бозонное поле

Поле бозонов, не имеющих спина, описывается скалярным (или псевдоскалярным) оператором $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$, который может иметь, кроме того, определенные свойства симметрии в изотопическом (зарядовом) пространстве.

Мы рассмотрим комплексное скалярное поле, описывающее заряженные частицы. Такое поле подчиняется уравнению Клейна **):

$$(\square^2 - m^2) \hat{\varphi} = 0, \quad (16.1)$$

$$(\square^2 - m^2) \hat{\varphi}^+ = 0, \quad (16.1')$$

и правилам коммутации:

$$[\varphi(\mathbf{x}), \varphi^+(\mathbf{x}')] = iD(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (16.2)$$

где $[A, B] = AB - BA$ есть обычный коммутатор, а функция $D(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ определяется формулой (14.5):

$$D(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\sin \omega t}{\omega} d^3k; \quad (16.3)$$

здесь \mathbf{k} — импульс бозона и ω — его энергия (в системе единиц, где $\hbar = 1$). Остальные коммутаторы

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\varphi}(\mathbf{x}')] = [\hat{\varphi}^*(\mathbf{x}), \hat{\varphi}^*(\mathbf{x}')] = 0. \quad (16.2')$$

*) В этом параграфе мы следовали работе [30].

**) См. [37, 38].

Бозонное поле $\hat{\varphi}(x)$, аналогично фермионному полю, может быть представлено в виде разложения по фундаментальной системе ортогональных функций:

$$\hat{\varphi}(x) = \int d^3k \{ \hat{a}(k) U(k) e^{ikx} + \hat{b}^+(k) U^*(k) e^{-ikx} \}, \quad (16.4)$$

$$\hat{\varphi}^+(x) = \int d^3k \{ \hat{a}^+(k) U^*(k) e^{-ikx} + \hat{b}(-k) U(-k) e^{ikx} \}, \quad (16.4')$$

где

$$U(k) = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}, \quad (16.5)$$

$\omega = +\sqrt{k^2 + m^2}$, m — масса бозона. Операторы \hat{a} , \hat{a}^+ , \hat{b} и \hat{b}^+ имеют смысл, аналогичный операторам в разложениях (14.6) и (14.6') для фермионного поля. Именно, они подчиняются правилам коммутации:

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^+(k')] = \delta^3(k - k'), \quad (16.6)$$

$$[\hat{b}(k), \hat{b}^+(k')] = \delta^3(k - k'); \quad (16.6')$$

остальные коммутаторы: $[\hat{a}, \hat{a}']$, $[\hat{a}^+, \hat{a}^{+'}]$, $[\hat{b}, \hat{b}']$, $[\hat{b}, \hat{b}^{+'}]$, $[\hat{a}, \hat{b}']$ — равны нулю. Физический смысл операторов \hat{a} , \hat{a}^+ , \hat{b} , \hat{b}^+ таков:

оператор $\hat{a}(k)$, действуя на функционал Ψ , описывающий состояние бозонного квантованного поля, уменьшает число положительно заряженных бозонов $n^+(k)$ в состоянии с импульсом k и энергией $\omega = +\sqrt{k^2 + m^2}$ на единицу:

$$\hat{a}(k) \Psi(\dots, n^+(k), \dots) = \Psi(\dots, n^+(k) - 1, \dots); \quad (16.7)$$

оператор $\hat{a}^+(k)$ порождает положительно заряженную частицу в состоянии (k, ω) :

$$\hat{a}^+(k) \Psi(\dots, n^+(k), \dots) = \Psi(\dots, n^+(k) + 1, \dots). \quad (16.7')$$

Операторы $\hat{b}(k)$ и $\hat{b}^+(k)$ имеют тот же смысл для отрицательно заряженных бозонов:

$$\hat{b}(k) \Psi(\dots, n^-(k), \dots) = \Psi(\dots, n^-(k) - 1, \dots), \quad (16.8)$$

$$\hat{b}^+(\mathbf{k}) \Psi(\dots, n^-(\mathbf{k}), \dots) = \Psi(\dots, n^-(\mathbf{k}) + 1, \dots). \quad (16.8')$$

Из уравнений (16.1) и (16.1') следует закон сохранения:

$$\frac{\partial \hat{J}_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad (16.9)$$

где

$$\hat{J}_\mu = ie \left\{ \hat{\varphi}^* \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \hat{\varphi}^*}{\partial x_\mu} \hat{\varphi} \right\}, \quad (16.10)$$

причем четвертая компонента имеет смысл оператора плотности электрического заряда:

$$\hat{J}_4 = i\hat{\rho} = ie \left\{ \hat{\varphi}^* \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\varphi}^*}{\partial t} \hat{\varphi} \right\}. \quad (16.11)$$

Однако, в отличие от случая фермионов, как будет видно из дальнейшего, бозонам нельзя приписать положительно definite плотности вероятности $\omega(x) = \rho/e$, даже для одночастичного состояния с определенным знаком энергии. Обратимся теперь к рассмотрению такого состояния. Пусть $\Psi(1)$ есть функционал поля, описывающий одночастичное состояние с неопределенным импульсом бозона \mathbf{k} и определенным знаком энергии $\omega > 0$. Этот функционал можно представить в виде, совершенно аналогичном случаю фермионного поля (ср. (14.14)):

$$\Psi(1) = \int A(\mathbf{k}) d^3k \delta(n^+(\mathbf{k}) - 1) \times \\ \times \delta[n^-(\mathbf{k})] \prod_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} \delta[n^+(\mathbf{k}')] \delta[n^-(\mathbf{k}')]. \quad (16.12)$$

Матричный элемент оператора бозонного поля, соответствующий переходу из состояния вакуума $\Psi(0)$ в состояние $\Psi(1)$, описываемому формулой (16.12), на основании (16.4), (16.4'), (16.7)—(16.8') будет равен

$$\varphi(x) = \langle \Psi(0) | \hat{\varphi}(x) | \Psi(1) \rangle = \int A(\mathbf{k}) U(\mathbf{k}) e^{ikx} d^3k \quad (16.13)$$

и описывает волновой пакет бозона с импульсом, определенным амплитудой $A(\mathbf{k})$, и положительной энергией $\omega = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

В силу нормировки функционала

$$\langle \Psi(1), \Psi(1) \rangle = 1 \quad (16.14)$$

получается нормировка для амплитуды $A(k)$:

$$\int A^*(k) A(k) d^3k = 1. \quad (16.15)$$

Рассмотренный матричный элемент $\varphi(x)$ оператора поля $\hat{\varphi}(x)$ (16.13) имеет смысл волновой функции бозона в одночастичной теории скалярного поля.

Вычислим теперь средние значения четвертой компоненты тока J_4 или, что удобнее, величину $w(x) = J_4/ie$ в одночастичном состоянии $\Psi(1)$ (16.12). На основании (16.11) и (16.13) имеем

$$\begin{aligned} w(x) &= \langle \Psi(1) | i \left(\hat{\varphi}^* \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\varphi}^*}{\partial t} \hat{\varphi} \right) | \Psi(1) \rangle = \\ &= i \left(\varphi^*(x) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \varphi(x) \right), \end{aligned} \quad (16.16)$$

причем $\varphi(x)$ определяется формулой (16.13), где интегрирование по d^3k распространено только по положительным энергиям: $kx = \mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t$, $\omega = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Величина W , выражающаяся формулой

$$W \equiv (\varphi, \psi) \equiv \int w(x) d^3x = i \int \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \varphi \right) d^3x, \quad (16.17)$$

сохраняется в силу уравнения непрерывности (16.9):

$$\frac{dW}{dt} = \int \frac{\partial w}{\partial t} d^3x = - \int \operatorname{div} \mathbf{J} d^3x = \int J_N d\sigma = 0. \quad (16.18)$$

Обобщенную величину

$$(\varphi, \psi) = i \int \left(\varphi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \psi \right) d^3x \quad (16.17')$$

можно рассматривать как скалярное произведение двух одночастичных функций: φ и ψ . Если в качестве этих функций взять фундаментальные решения

$$\varphi_k(x) = \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{(2\pi)^{3/2}} U_k, \quad (16.19)$$

то они образуют полную систему функций, причем условие полноты при $t = t'$ гласит:

$$\int \varphi_k^*(x) \varphi_k(x') d^3k = \Delta^+(x - x'), \quad (16.20)$$

где функция $\Delta^+(x)$ равна

$$\Delta^+(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i(kx - \omega t)}}{\omega} d^3k. \quad (16.21)$$

В силу этого обстоятельства функция $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$, соответствующая «точной» локализации бозона, не принадлежит к классу функций, представимых разложением (16.13). Пользуясь тем, что одночастичная волновая функция $\varphi(x)$ с определенным знаком энергии удовлетворяет уравнениям

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \hat{\omega} \varphi, \quad (16.22)$$

$$-i \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} = \hat{\omega} \varphi^*, \quad (16.22')$$

где оператор $\hat{\omega}'$ равен

$$\hat{\omega} = +\sqrt{m^2 - \nabla^2}; \quad (16.23)$$

используя формулу (16.11), плотность $w(x)$ можно представить в виде

$$w(x) = \frac{1}{2} (\hat{\omega} \varphi^* \varphi + \varphi^* \hat{\omega} \varphi). \quad (16.24)$$

Уже из вида формулы (16.24) видно, что она сама собой не гарантирует положительной дефинитности. В дополнении III приведен пример состояния бозонного поля, описанного суперпозицией двух волн φ_2 и φ_1 с сильно различающимися импульсами \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_1 и имеющих энергию одного и того же знака ($\omega_2 \gg \omega_1 > 0$):

$$\varphi(x) = \frac{c_1}{\sqrt{2\omega_1}} \varphi_1 + \frac{c_2}{\sqrt{2\omega_2}} \varphi_2. \quad (16.25)$$

В этом случае

$$w(\mathbf{x}, t) \approx \frac{|c_1|^2}{\omega_1} \left\{ 1 + \left| \frac{c_2}{c_1} \right| \cos [(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, \mathbf{x}) - (\omega_2 - \omega_1)t + \alpha] \right\}, \quad (16.26)$$

и если $|c_2/c_1| > 1$, то эта плотность осциллирует в пространстве с периодом порядка $1/|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1|$ и осциллирует во времени с периодом $1/|\omega_2 - \omega_1|$.

Физически наблюдаемой и положительно definite величиной в случае бозонного поля является плотность энергии этого поля $\varepsilon(x)$; оператор этой величины $\hat{\varepsilon}(x)$ может быть выведен из тензора энергии-импульса бозонного поля:

$$\hat{T}_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \hat{\varphi}^+}{\partial x_\mu} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \hat{\varphi}^+}{\partial x_\mu} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_\mu} - m^2 \hat{\varphi}^+ \hat{\varphi} \right). \quad (16.27)$$

Отсюда

$$\hat{\varepsilon}(x) = -\hat{T}_{44}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{\varphi}^+}{\partial t} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial t} + \nabla \hat{\varphi}^+ \nabla \hat{\varphi} + m^2 \hat{\varphi}^+ \hat{\varphi} \right). \quad (16.28)$$

Стало быть, среднее значение $\varepsilon(x)$ в состоянии $\Psi(1)$ есть

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \langle \Psi(1) | \hat{\varepsilon}(x) | \Psi(1) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \varphi^* \nabla \varphi + m^2 \varphi^* \varphi \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (16.29)$$

§ 17. Локализация фотонов

Электромагнитное поле принадлежит к классу бозонных полей, но, в отличие от скалярных мезонных полей, оно описывается векторным оператором — оператором вектор-потенциала $\hat{A}_\mu(x)$, где $\mu = 1, 2, 3, 4$, с компонентами $\hat{A}(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3), \hat{\varphi} = \frac{1}{i} \hat{A}_4$.

Этот потенциал определен с точностью до градиентного преобразования:

$$\hat{A}_\mu(x) = \hat{A}_\mu(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x_\mu}, \quad (17.1)$$

где $f(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению Даламбера:

$$\square^2 f(x) = 0. \quad (17.1')$$

Ввиду этого произвола собственные значения вектор-потенциала не являются физически измеримыми величинами.

Измеримыми величинами являются компоненты антисимметричного тензора электромагнитного поля:

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \hat{A}_\nu}{\partial x_\mu} \quad (17.2)$$

или, в векторных обозначениях,

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} - \nabla \hat{\Phi}, \quad (17.2')$$

$$\mathcal{H} = \text{rot } \hat{A}, \quad (17.2'')$$

где \mathcal{E} есть оператор напряженности электрического поля, а \mathcal{H} — оператор напряженности магнитного поля.

Особенностью свободного электромагнитного поля является его поперечность. Поэтому из четырех компонент вектора A_μ только три независимы. Это накладывает условие на выбор волнового функционала Ψ :

$$\langle \Psi | \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} | \Psi \rangle = 0. \quad (17.3)$$

Если это условие соблюдено в начальный момент времени, то оно, как можно показать, будет соблюдаться и в дальнейшем в силу уравнений движения *). При соблюдении условия (17.3) уравнение для вектор-потенциала электромагнитного поля гласит:

$$\square^2 \hat{A}_\mu = 0. \quad (17.4)$$

Правила коммутации операторов \hat{A} записываются в форме:

$$[\hat{A}_\mu(x), \hat{A}_\nu(x')] = -iD(x-x') \delta_{\mu\nu}, \quad (17.5)$$

причем $D(x)$ при $m=0$ имеет вид

$$D(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{ikx} \frac{\sin \omega t}{\omega} d^3k, \quad (17.6)$$

где $\omega = |\mathbf{k}|$. Разложение вектор-потенциала по фундаментальной системе функций имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{A}_\mu(x) &= \\ &= \sum_{\lambda=1}^4 d^3k e_\mu^\lambda [\hat{A}_\lambda(\mathbf{k}) U(\mathbf{k}) e^{ikx} + \hat{A}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) U^*(\mathbf{k}) e^{-ikx}], \end{aligned} \quad (17.7)$$

*) Подробности о квантовании электромагнитного поля см. в [37] или [38].

где $U(\mathbf{k}) = 1/\sqrt{2\omega}$, $kx = \mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t$, e_μ^λ суть компоненты единичного вектора, определяющего поляризацию, а $\hat{A}_\lambda(\mathbf{k})$ и $\hat{A}_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$ — операторы амплитуд парциальных волн. Заметим, что в этом разложении участвуют все четыре поляризации (две поперечные, одна продольная и одна временная). При соблюдении условия (17.3) на основании уравнений (17.2') и (17.2'') для наблюдаемых величин $\hat{\mathcal{E}}$ в $\hat{\mathcal{H}}$ получим разложения

$$\hat{\mathcal{E}}(x) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k \omega (\hat{A}_\lambda(\mathbf{k}) U_k(x) - \hat{A}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) U_k^*(x)) e^\lambda, \quad (17.8)$$

$$\hat{\mathcal{H}}(x) = i \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3k [k e^\lambda] (\hat{A}_\lambda(\mathbf{k}) U_k(x) - \hat{A}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) U_k^*(x)), \quad (17.8')$$

где участвуют лишь две поперечные поляризации: $\lambda = 1, 2$. Из правил коммутации (17.5) следуют условия коммутации для амплитуд $A_\lambda(\mathbf{k})$:

$$[\hat{A}_\lambda(\mathbf{k}), \hat{A}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (17.9)$$

$$[\hat{A}_\lambda(\mathbf{k}), \hat{A}_{\lambda'}(\mathbf{k}')] = [\hat{A}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}), \hat{A}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')] = 0. \quad (17.9')$$

Единственной физически наблюдаемой величиной, которая подчиняется закону сохранения, в случае векторного поля является тензор энергии-импульса поля $T_{\mu\nu}(x)$; оператор, представляющий этот тензор, имеет вид

$$\hat{T}_{\mu\nu}(x) = \hat{F}_{\mu\rho} \hat{F}_{\nu\rho} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \hat{F}_{\sigma\rho}^2; \quad (17.10)$$

отсюда имеем

$$\hat{T}_{44}(x) = -\frac{1}{2} (\hat{\mathcal{E}}^2 + \hat{\mathcal{H}}^2), \quad \hat{T}_{k4}(x) = -i (\hat{\mathcal{E}} \times \hat{\mathcal{H}})_k = -i \hat{S}_k. \quad (17.11)$$

Закон сохранения для тензора $\hat{T}_{\mu\nu}(x)$ гласит:

$$\frac{\partial \hat{T}_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\nu} = 0, \quad (17.12)$$

в частности, для оператора плотности энергии

$$\varepsilon(x) = -\hat{T}_{44}(x) \quad (17.13)$$

получаем из (17.12)

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}(x)}{\partial t} + \operatorname{div} \hat{\mathbf{S}}(x) = 0, \quad (17.14)$$

где $\hat{\mathbf{S}}(x)$ есть оператор вектора потока энергии, имеющего компоненты $\hat{S}(x) = i\hat{T}_{4k}(x)$. Обратимся теперь к однофотонному состоянию с неопределенным импульсом \mathbf{k} .

Для этого заметим, что операторы амплитуды $\hat{A}_\lambda(\mathbf{k})$, $\hat{A}_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$, в силу правил коммутации (17.9) и (17.9'), действуют на волновой функционал Ψ совершенно таким же образом, как рассмотренные ранее в § 16 операторы скалярного поля (ср. формулы (16.7) и (16.7')). Для однофотонного состояния этот волновой функционал имеет вид

$$\Psi(1) = \int A_\lambda(\mathbf{k}) d^3k \delta(n_\lambda(\mathbf{k}) - 1) \prod_{\lambda=1,2} \prod_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} \delta[n_\lambda(\mathbf{k}')], \quad (17.15)$$

где $A_\lambda(\mathbf{k})$ — произвольная амплитуда волны с волновым вектором \mathbf{k} и поляризацией λ ($\lambda = 1, 2$).

Пользуясь правилами действия операторов $\hat{A}_\lambda(\mathbf{k})$, $\hat{A}_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$ на волновой функционал (эти правила выражаются формулами, в точности совпадающими с формулами (16.7) и (16.7') для операторов скалярного поля $\hat{a}(\mathbf{k})$ и $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$), найдем, что матричный элемент оператора $\hat{A}_\lambda(x)$ равен

$$A_\lambda(x) = \langle \Psi(0) | \hat{A}_\lambda(x) | \Psi(1) \rangle = \int A_\lambda(\mathbf{k}) U(\mathbf{k}) e^{ikx} d^3k. \quad (17.16)$$

Функция $A_\lambda(x)$ содержит только положительные частоты и поэтому удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i \frac{\partial A_\lambda(x)}{\partial t} = \hat{\omega} A_\lambda(x), \quad (17.17)$$

где $\hat{\omega} = +\sqrt{-\Delta^2}$. Подобному же уравнению удовлетворяет и сопряженная функция $A_\lambda^*(x)$:

$$-i \frac{\partial A_\lambda^*(x)}{\partial t} = \hat{\omega} A_\lambda^*(x). \quad (17.17')$$

Однако ввиду несамосопряженности оператора $\hat{\omega}$ величина $A_\lambda^* A_\lambda$ не подчиняется какому-либо уравнению сохранения.

Как уже отмечалось, величиной, сохраняющейся и составленной из реально измеримых (наблюдаемых) величин,

является величина плотности энергии $\varepsilon(x) = -T_{44}(x)$, которая выражается через электрическое $\mathcal{E}(x)$ и магнитное $\mathcal{H}(x)$ поля.

Нетрудно вычислить, что среднее значение плотности энергии $\varepsilon(x)$ в однофотонном состоянии равно

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \langle \Psi(1) | \hat{\varepsilon}(x) | \Psi(1) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} [\mathcal{E}(x) \mathcal{E}^*(x) + \mathcal{H}(x) \mathcal{H}^*(x)], \end{aligned} \quad (17.18)$$

где $\mathcal{E}(x)$ и $\mathcal{H}(x)$ суть матричные элементы операторов $\hat{\mathcal{E}}(x)$ и $\hat{\mathcal{H}}(x)$ для квантового перехода $\Psi(0) \rightarrow \Psi(1)$.

Таким образом, в случае свободного электромагнитного поля нельзя построить величину, которая могла бы играть роль плотности вероятности нахождения фотона в том или ином месте пространства в заданный момент времени. Однако существует плотность энергии, которая может быть сосредоточена в какой-либо ограниченной области пространства.

§ 18. Расплывание релятивистских пакетов

В предыдущих параграфах были рассмотрены состояния, соответствующие сильной локализации квантовых полей (локализованные пакеты).

Такие состояния не являются стационарными, а изменяются с течением времени, и притом таким образом, что степень локализации поля уменьшается: первоначально острый волновой пакет расплывается так, что величины $\overline{\Delta x^2}$, $\overline{\Delta y^2}$, $\overline{\Delta z^2}$ возрастают со временем. Характерные черты этого расплывания являются общими для всех полей, поэтому достаточно рассмотреть скалярное поле. Возьмем волновой пакет в форме *)

$$\varphi(x, t) = \int \frac{c(k)}{\omega} e^{i(kx - \omega t)} d^3k \quad (18.1)$$

($\omega = +\sqrt{k^2 + \mu^2}$) и положим

$$c(k) = N \exp -\frac{(k - k_1)^2}{2b^2}, \quad (18.2)$$

*) См. [30].

где N есть нормировочный множитель: $N = 1/\sqrt{b^3 V \pi^3}$; так как плотность $\rho(\mathbf{x}, t)$ равна

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{2} \left(\Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \quad (18.3)$$

то локализация при $t=0$ будет сильной, если $\Phi(\mathbf{x}, 0)$, или $\partial \Phi^*(\mathbf{x}, 0)/\partial t$, или обе эти величины сильно локализованы.

Подставляя (18.2) в (18.1), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} &= -iN \int e^{-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)^2}{2b^2} + i\mathbf{k}\mathbf{x}} d^3k = \\ &= -ie^{i\mathbf{k}_1\mathbf{x}} \frac{e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2a^2}}}{V a^3 \sqrt{\pi^3}}, \end{aligned} \quad (18.4)$$

где $a = 1/b$ и $a \rightarrow 0$ при $b \rightarrow \infty$, так что состояние (18.1) принадлежит к классу состояний, сильно локализованных при $t=0$.

При $t > 0$ будем иметь

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -iN e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{x} - \omega_1 t)} I(\mathbf{x}, t), \quad (18.5)$$

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{N}{\omega_1} e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{x} - \omega_1 t)} I(\mathbf{x}, t), \quad (18.5')$$

где

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}, t) &= \\ &= \int d^3k \exp \left[-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)^2}{2b^2} + i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)\mathbf{x} - i(\omega-\omega_1)t \right], \end{aligned} \quad (18.6)$$

причем в формуле (18.5') предположено, что $|\mathbf{k}_1| \gg b$.

Для определенности направим вектор \mathbf{k}_1 по оси Ox так, что $\mathbf{k}_1 = (k_{1x}, 0, 0)$. Тогда

$$\omega - \omega_1 = \frac{k_{1x}}{\omega_1} q_x + \frac{1}{2\omega_1} (q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) - \frac{1}{2} \frac{k_{1x}^2}{\omega_1^2} q_x^2 + \dots \quad (18.7)$$

и $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1$. Простое вычисление ведет к результату

$$I(\mathbf{x}, t) = A(t) \exp \left[i\alpha(\mathbf{x}, t) - \frac{(x - v_x t)^2}{2\Delta_{\parallel}^2} - \frac{y^2 + z^2}{2\Delta_{\perp}^2} \right], \quad (18.8)$$

где $A(t)$ — медленно меняющаяся величина, α — действительная фаза, а величины Δ_{\parallel}^2 и Δ_{\perp}^2 равны соответственно

$$\Delta_{\parallel}^2(t) = \frac{1}{b^2} + \frac{b^2 m^4}{\omega^6} t^2, \quad (18.9)$$

$$\Delta_{\perp}^2(t) = \frac{1}{b^2} + \frac{b^2}{\omega^2} t^2. \quad (18.9')$$

Полагая $\Delta^2(0) = 1/b^2$, эти формулы можно переписать в виде

$$\Delta_{\parallel}^2(t) = \Delta^2(0) + \frac{\lambda^2}{\Delta^2(0)} \frac{m^4}{E^4} v^2 t^2, \quad (18.10)$$

$$\Delta_{\perp}^2(t) = \Delta^2(0) + \frac{\lambda^2}{\Delta^2(0)} v^2 t^2, \quad (18.10')$$

где $\lambda = \hbar/p$ есть длина волны, p — импульс частицы, $v = \partial E / \partial p = p/E$ — ее скорость.

Из формулы (18.10) видно, что при $m=0$ волновой пакет не расплывается в продольном направлении, как это и должно быть для частиц с массой покоя $m=0$ (в этом случае волны де Бройля не имеют дисперсии в пустоте, так что $\partial\omega/\partial k \equiv c \equiv \text{const}$).

Что касается формулы (18.10'), то она совпадает с формулой (12.19), выведенной из теории дифракции для пучка, выходящего из узкой щели шириною $\Delta(0) = a$.

Однако имеются существенные различия в поведении релятивистского и нерелятивистского пучков. Действительно, ширина пучка растет пропорционально $\lambda^2 t^2 v^2$ (см. 12.19); в нерелятивистском случае $\lambda^2 v^2 = \frac{\hbar^2}{p^2} v^2 = \frac{\hbar^2}{m^2} = \text{const}$, а в релятивистском — $\lambda^2 v^2 = \hbar^2/E^2$, при $E \rightarrow \infty$, $\lambda^2 v^2 \rightarrow 0$. Для дисперсии в продольном направлении (в нерелятивистском случае она такая же, как и в поперечном направлении ($\Delta_{\parallel} = \Delta_{\perp}$)) в релятивистском случае появляется дополнительный множитель $(m/E)^4$ стремящийся к нулю при $E \rightarrow \infty$, который существенно уменьшает рост $\Delta_{\parallel}^2(t)$ с течением времени. В этом выражается тенденция к поведению, сходному с поведением частиц без массы покоя, для которых $\Delta_{\parallel}^2(t) = \text{const}$.

Перепишав формулу (18.10) в виде

$$\Delta_{\perp}^2(t) = \Delta^2(0) + \frac{\Delta_0^2}{\Delta^2(0)} \left(\frac{m}{E}\right)^2 c^2 t^2, \quad (18.10'')$$

где $\Lambda_0 = \hbar/mc$, мы можем трактовать уменьшение скорости роста $\Delta_{\perp}^2(t)$ как эффект замедления времени $t' = \frac{m}{E}t$, а для движущейся системы — как эффект «близнецов»: время жизни быстро движущегося пакета возрастает в E/m раз.

Таким образом, релятивистские эффекты оказывают стабилизирующее влияние на волновые пакеты.

Рассмотренные выше особенности релятивистских пакетов являются общими для полей различной ковариантности, что видно из того обстоятельства, что все эти черты связаны не столько с видом амплитуды пакета $c(k)$, сколько с законом дисперсии волн де Бройля в пустоте:

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}}, \quad (18.11)$$

который ведет себя совершенно различным образом при $k \gg m$ и $k \ll m$.

§ 19. Координата Ньютона — Вигнера

Как было показано ранее, в релятивистском случае $\delta(x)$ не может быть собственной функцией оператора координаты элементарной частицы, так как не может быть построена из состояний с положительной энергией.

В этой связи Т. Ньютон и Е. Вигнер [39] ввели новый оператор положения частицы \hat{q} , свойства которого определяются исходя из понятия локализованного состояния ψ . Они постулируют следующие свойства состояний, представляющих частицу, локализованную в момент времени t в точке $x = y = z = 0$:

а) эти состояния образуют линейную совокупность, т. е. суперпозиция двух локализованных состояний есть также локализованное состояние;

б) эта совокупность преобразуется сама в себя при вращениях около начала координат и при отражениях пространственных и временных;

в) если ψ есть локализованное состояние, то пространственное смещение этого состояния делает его ортогональным к состояниям, локализованным в начале координат;

г) должны выполняться некоторые требования регулярности, позволяющие применять к локализованным состояниям операторы группы Лоренца.

Найти эти состояния особенно просто в случае бесспиновой частицы.

В импульсном представлении волновая функция бесспиновой частицы ψ есть функция импульса \mathbf{k} и $k_0 = \omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$.

Из требования б) в случае скалярных частиц вытекает, что ψ есть функция от \mathbf{k}^2 или, что то же, от ω , т. е. $\psi = \psi(\omega)$.

Используем теперь требование в). Оператор пространственного смещения $\hat{T}_3(a)$ в импульсном представлении сводится к умножению на e^{ika} :

$$\varphi(\mathbf{k}) = \hat{T}_3(a) \psi(\omega) = e^{ika} \psi(\omega). \quad (19.1)$$

Это состояние должно быть ортогонально к состоянию, локализованному в начале координат, т. е. к $\psi(\omega)$. В качестве $\varphi(\mathbf{k})$ и $\psi(\omega)$ мы возьмем ковариантные амплитуды в разложении

$$\tilde{\varphi}(x) = \int \varphi(\mathbf{k}) e^{ikx} \frac{d^3k}{\omega}, \quad (19.2)$$

так что $\varphi(\mathbf{k}) = A(\mathbf{k}) \sqrt{\omega}$ и $\psi(\omega) = B(\omega) \sqrt{\omega}$. Согласно (16.17') скалярное произведение φ на ψ будет иметь вид

$$(\varphi\psi) = \int \varphi^* \psi \frac{d^3k}{\omega}; \quad (19.3)$$

подставляя сюда значения φ и ψ , получим

$$\int \frac{|\psi(\omega)|^2}{\omega} e^{-ika} d^3k = 0, \quad (19.4)$$

если $a \neq 0$. Отсюда следует, что $|\psi(\omega)|^2/\omega = \text{const}$, т. е. $\psi(\omega) \approx \omega^{1/2}$; например, можно положить

$$\psi(\omega) = \frac{\omega^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (19.5)$$

Применяя к (19.5) оператор смещения, получим функцию, представляющую собой состояние, локализованное около точки \mathbf{x} :

$$\psi_x(\mathbf{k}) = \hat{T}(\mathbf{x}) \psi(\omega) = \frac{\omega^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (19.6)$$

Нетрудно убедиться, что эта функция есть собственная функция оператора \hat{q}_x :

$$\hat{q}_x = -i \left(\frac{\partial}{\partial k_x} + \frac{k_x}{2\omega^2} \right), \quad (19.7)$$

который и является оператором координаты элементарной частицы по Ньютону — Вигнеру.

Действительно, применяя оператор \hat{q}_x к функции (19.6), получим

$$\hat{q}_x \psi_x(k) = x \psi_x(k), \quad (19.8)$$

так что x есть собственное значение оператора \hat{q}_x в состоянии $\psi_x(k)$, локализованном около точки x при $t=0$.

Обратимся теперь к координатному представлению состояния, локализованного около точки $x=0$ в момент времени $t=0$. Согласно (19.2) и (19.5) имеем

$$\tilde{\varphi}(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{e^{ikx}}{\omega^{1/2}} d^3k = \left(\frac{m}{r} \right)^{5/4} H_{5/4}^{(1)}(imr), \quad (19.9)$$

где $H_{5/4}^{(1)}$ есть функция Ганкеля первого рода порядка $5/4$. При $r \rightarrow 0$ $\tilde{\varphi}(r) \approx r^{-5/2}$; при $r \rightarrow \infty$ ($r \gg \hbar/mc$) $\tilde{\varphi}(r) \approx e^{-mr}$. Отсюда видно, что область локализации состояния по порядку величины определяется комптоновской длиной волны частицы \hbar/mc (в формуле (19.9) $c=1$ и $\hbar=1$).

Из поведения в нуле функции $\tilde{\varphi}(r)$ следует, что локализованные состояния принадлежат к классу ненормируемых.

Рассмотренное в этом разделе «локализованное» состояние $\psi(\omega)$ и новый оператор координаты \hat{q}_x естественно вытекают из принятых выше постулативных требований а), б), в), г) *). Однако физическая интерпретация этих состояний и операторов \hat{q}_x , \hat{q}_y , \hat{q}_z связана с рядом трудностей, не позволяющих этим операторам конкурировать с обычными координатами x , y , z .

Первая из этих трудностей заключается в том, что состояние, локализованное при $t=0$ в точке $x=0$ в одной системе координат, не будет локализованным (в смысле выполнения условий а), б), в), г)) в движущейся системе

*) Заметим, что так как мы ограничились случаем бесспиновых частиц, то нам не было необходимости использовать все пункты а), б) в), г).

координат, даже если точки $x=0$ и $x'=0$ совпадают при $t=t'=0$. В силу этого обстоятельства операторы \hat{q}_x , \hat{q}_y , \hat{q}_z не обладают свойствами релятивистской ковариантности.

Вторая трудность заключается в том, что нельзя указать даже мысленный опыт, который позволил бы измерить операторы q_x , q_y , q_z , иными словами, выделить локализованное состояние $\psi(\omega)$.

Создается впечатление, что оператор координаты Ньютона — Вигнера \hat{q} является оператором координаты центра тяжести волнового пакета $\hat{\phi}(p)$, представляющего состояние, которое *по определению* называется *локализованным*.

Ввиду этих затруднений мы предпочитаем работать «со старыми» координатами x , y , z и t , которые могут быть измерены, по крайней мере в мысленном опыте.

Такой опыт основан на допущении возможности получения как угодно узких пучков, как угодно короткой длины волны ($\lambda \rightarrow 0$) и, стало быть, на допущении принципиальной возможности существования сколь угодно узких диафрагм ($a \rightarrow 0$).

Хотя такие допущения и представляются весьма формальными, тем не менее они имеют преимущество определенности.

§ 20. Измерение координат микрочастицы в релятивистском случае

Постановка задачи об измерении координат микрочастицы в релятивистском случае весьма сходна с таковой в нерелятивистском случае, которая была подробно рассмотрена в §§ 11, 12.

Так же как и в нерелятивистском случае, мы должны различать прямое и косвенное измерение.

В случае прямого измерения речь идет об измерении координаты свободной частицы. В § 14 было показано, что для частиц со спином $1/2$, подчиняющихся уравнению Дирака, допустимы одночастичные состояния с положительной энергией, как угодно точно локализованные около точки $x=x'$ в момент времени $t=t'$. Из законов распыления таких состояний следует, что этот крайне локализованный волновой пакет состояния будет расширяться

со скоростью света, если только он сам не движется с очень большой скоростью, так что средний импульс частицы в таком пакете $\bar{p} \gg mc$ (m — масса частицы).

В этом случае (см. § 18) продольное расширение пакета практически прекращается, а скорость поперечного расширения уменьшается в m/E раз ($E = \sqrt{p^2 + m^2}$).

Локализованные одночастичные состояния в случае частиц со спином 0 (подчиняющихся уравнению Клейна — Гордона) и со спином 1 (фотоны, подчиняющиеся уравнениям Максвелла) существуют разве в виде специальных исключений.

Как было показано в § 16 и § 17, в этих случаях разумнее говорить о локализации мезонного поля, нежели о локализации мезонов или фотонов. Другая особенность релятивистского случая заключается в значительном уменьшении произвола в выборе возможных взаимодействий: взаимодействие должно подчиняться определенным требованиям релятивистской инвариантности. Однако эти требования все же оставляют еще широкие возможности для обсуждения мысленных опытов, так как теория относительности не накладывает никаких ограничений на массы и заряды частиц, кроме ограничения, относящегося к условию существования частиц в связанном состоянии. Именно, энергия связи частиц должна быть существенно меньше ее собственной энергии:

$$\Delta E \ll mc^2. \quad (20.1)$$

Обратимся теперь к обсуждению прямого измерения координаты, рассмотренного для нерелятивистского случая в § 12. Мы можем, как и в § 12, считать, что атом фотопластинки является бесконечно тяжелым ($Mc^2 \gg E$, E — энергия частицы) и поглощаемая при возбуждении атома энергия $\varepsilon = \varepsilon_n - \varepsilon_0$ также мала в сравнении с энергией частицы ($E \gg \varepsilon$), координату которой мы измеряем. Для того чтобы придать релятивистски инвариантный вид δ -образному взаимодействию (12.2), мы можем считать, что оно обусловлено обменом очень тяжелыми мезонами. В этом случае

$$W = g \frac{e^{-r/a}}{r}, \quad (20.2)$$

где a — комптоновская длина гипотетического тяжелого мезона, g — константа связи, $r = \sqrt{(x - Q)^2}$. В пределе бесконечно тяжелого мезона $a \rightarrow 0$ функция (20.2) сосредоточивается в объеме порядка $a^3 \rightarrow 0$. При указанных выше условиях атом фотопластинки остается нерелятивистской системой и релятивистское рассмотрение распространяется только на описание движения свободной частицы, координату которой определяют с помощью наблюдения последствий возбуждения атомов фотопластинки, и на ее взаимодействие с этими атомами.

В борновском приближении, в котором мы и проводили расчет в § 12, релятивизм не внесет никаких изменений принципиального характера в те выводы, которые были сделаны в § 12 относительно физических процессов при таком измерении. В частности, замена δ -образного взаимодействия (12.2) на взаимодействие посредством ультратяжелых мезонов (20.2) и замена шредингеровской волновой функции на четырехкомпонентный спинор, удовлетворяющий уравнению Дирака, оставляют в силе вывод о том, что при малых промежуточных временах (ср. (12.8)) возбуждение атома сопровождается локализацией микрочастицы вблизи атома. Этот же вывод сохраняет свое значение и для мезонов, удовлетворяющих волновому уравнению Клейна.

Обратимся теперь к косвенному измерению. В этом случае речь идет об измерении координаты частицы, находящейся в связанном состоянии, с помощью наблюдения рассеяния узкого пучка-шупа. Прежде всего следует заметить, что поскольку мы предполагаем, что микрочастица, находящаяся в связанном состоянии, сохраняет свою индивидуальность, то тем самым мы уже предопределяем малость масс-дефекта ΔE по сравнению с собственной энергией частицы mc^2 . В силу этого релятивистские эффекты будут носить характер поправок, не могущих повлиять на основные выводы, сделанные в § 12 при обсуждении нерелятивистского косвенного измерения. Более существенным является то обстоятельство, что узкий пучок, необходимый для прощупывания местоположения связанной микрочастицы в релятивистском случае, по причинам, описанным в § 18, может быть сделан значительно более узким и имеющим значительно меньший угловой раствор, нежели это допустимо для нерелятивистских пучков.

В заключение этого обсуждения — несколько разъяснений касательно возможности реализации таких узких пучков-щупов. Речь идет, конечно, не о практической их реализации, а лишь о мысленной возможности, совместимой с принципами теории. Необходимую узкую щель шириной $a \gg \lambda$ (при $\lambda \rightarrow 0$) мы можем представить себе сделанной в диафрагме, которая образована сильно поглощающим веществом. Если необходимое поглощение обусловлено рождением новых очень тяжелых и, следовательно, медленных частиц, то их рождение не будет «загрязнять» наш пучок-щуп. Существование диафрагмы с такими свойствами не противоречит принципам квантовой теории поля и поэтому может служить формальным основанием для рассмотрения крайне узких пучков и малых волновых пакетов (см. дополнение IV).

РОЛЬ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

§ 21. Поляризация вакуума. Размер электрона

Анализируя возможности измерения пространственно-временных координат элементарной частицы, мы предполагали сами частицы точечными. Поэтому точность определения координат микрочастицы ограничивалась возможностью создания как угодно узких пучков-зондов, обладающих контактным взаимодействием с микрочастицей, положение которой в пространстве—времени измеряется таким зондом. Последнее требование о контактности взаимодействия необходимо, чтобы исключить эффекты, связанные с существованием конечного (или даже бесконечного) радиуса взаимодействия.

Как было показано, теория в принципе допускает такую возможность в форме мысленного эксперимента. Однако из этой же теории следует, что физическая картина *точечной* частицы является на самом деле приближенной. В высших приближениях по степеням константы взаимодействия возникают эффекты, которые могут рассматриваться как проявление структуры частиц. Эта структура носит динамический характер, и ее не удастся свести к распределению в пространстве какого-либо вещества.

Мы начнем рассмотрение вопросов структуры с простейшего случая бесконечно тяжелой, точечной, электрически заряженной частицы. Такая частица создает вокруг себя кулоновское поле, потенциал которого равен

$$V(r) = \frac{e}{r}, \quad (21.1)$$

где e —заряд частицы, а r —расстояние от частицы до точки наблюдения.

Взаимодействие этой частицы с другой заряженной частицей, которая рассеивается на первой, может быть

представлено диаграммой Фейнмана, изображенной на рис. 15, а, где M означает тяжелую точечную частицу, линия 1—2 показывает вход и выход рассеивающейся частицы, а пунктирная линия q —линию виртуального фотона, который передает импульс от одной частицы к

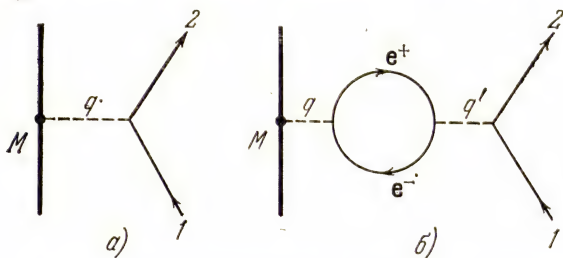


Рис. 15. а) Диаграмма, описывающая рассеяние заряженной частицы (линия 1—2) на бесконечно тяжелой (неподвижной) заряженной частице M ; q —виртуальный фотон. б) Диаграмма, учитывающая поляризацию вакуума. Эта диаграмма дает поправки к закону Кулона, обусловленные поляризацией вакуума, q и q' —виртуальные фотоны, e^+ , e^- —позитрон и электрон виртуальной пары.

другой. Помимо этой простейшей диаграммы есть и другие диаграммы, дающие вклад в рассматриваемый процесс. Одна из них изображена на рис. 15, б. Эта диаграмма описывает рождение пары позитрон—электрон (петля e^+ , e^-) виртуальным фотоном q , аннигиляцию этой пары с последующим испусканием фотона q' , который опять же обуславливает обмен импульсами между частицами. Эта сложная диаграмма учитывает, в первом исчезающем приближении, эффект поляризации электронно-позитронного поля кулоновским полем тяжелой частицы M . Расчет этого эффекта весьма громоздок, и мы отсылаем читателя за необходимыми выкладками к курсам квантовой электродинамики *).

Вычисление показывает, что учет поляризационных поправок приводит к новому выражению для потенциала точечного заряда, именно вместо (21.1) получается

$$V(r) = \frac{e(r)}{r}, \quad (21.2)$$

*) См., например, гл. VIII в [37], гл. VI в [38].

где величину $e(r)$ называют *эффективным зарядом*. Как показывает вычисление, эффективный заряд оказывается равным:

$$e(r) = \begin{cases} e \left\{ 1 + \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{\Lambda}{r} \right)^2 + \dots \right\} & \text{для } r \ll \Lambda, \quad (21.3) \\ e \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\pi^4}} e^{-2\frac{r}{\Lambda}} / \left(\frac{r}{\Lambda} \right)^{3/2} + \dots \right\} & \text{для } r \gg \Lambda. \quad (21.3') \end{cases}$$

Здесь $\alpha = e^2/\hbar c$, $\Lambda = \hbar/mc$, m — масса электрона. Из этих формул видно, что эффективный заряд при малых r велик; по мере возрастания расстояния r этот заряд все сильнее и сильнее экранируется поляризацией вакуума, так что при $r \gg \Lambda$ он становится равен заряду частицы e , наблюдаемому макроскопически*). Из формулы (21.3') видно также, что эффективный заряд распределен в области, размер которой по порядку величины равен комптоновской длине электрона ($\hbar/mc = 3,86 \cdot 10^{-11}$ см). Существование поляризации вакуума приводит к принципиальной возможности рассеяния света на бесконечно тяжелой заряженной частице.

Известно, что в силу линейности уравнений Максвелла статическое поле и поле волны накладываются друг на друга без искажения. Поляризация вакуума нарушает эту линейность. В первом исчезающем приближении взаимодействие кванта света с полем тяжелой частицы через поляризацию вакуума описывается диаграммой, приведенной на рис. 16. Внешние линии 1 и 2 показывают, как и ранее, вход и выход рассеивающего фотона. Круг из линий e^\pm иллюстрирует образование виртуальных пар позитронов и электронов, порождающихся при поляризации вакуума; линии q, q' — линии виртуальных фотонов, передающих импульс тяжелой заряженной частице M .

Следует иметь в виду, что при взаимодействии фотона с тяжелой заряженной частицей (например, с ядром атома) при частоте фотона $\omega \gg 2mc^2/\hbar$ преобладающим эффектом будет рождение пар позитронов и электронов (e^+, e^-) и, следовательно, поглощение фотона. Это поглощение ведет к упругому дифракционному рассеянию фо-

*) Следует, однако, иметь в виду, что формулы (21.3) и (21.3') являются приближенными и справедливы лишь до тех пор, пока поправки $|e(r) - e|$ малы по сравнению с e .

тона. Полное сечение упругого рассеяния $\sigma_{\text{уп}}$ складывается из сечения упругого дифракционного рассеяния $\sigma'_{\text{уп}}$ и сечения упругого рассеяния, связанного с поляризацией вакуума $\sigma''_{\text{уп}}$, которая обусловлена процессом, показанным на диаграмме (рис. 16).

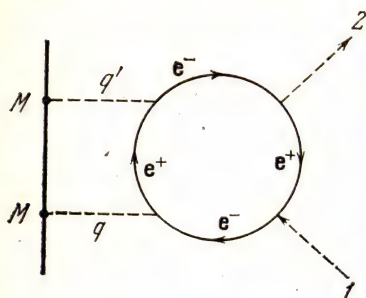


Рис. 16. Диаграмма, описывающая рассеяние света на неподвижной заряженной частице M . Рассеяние фактически происходит на электронах и позитронах (e^{\pm}) поляризованного частицей M вакуума; здесь так же, как на рис. 15, q и q' — виртуальные фотоны, e^{\pm} — виртуальные пары.

ума $\sigma''_{\text{уп}}$, которая обусловлена процессом, показанным на диаграмме (рис. 16).

Так как сечение рождения пар σ_{\pm} велико, отношение $\sigma''_{\text{уп}}$ к $\sigma'_{\text{уп}}$ мало:

$$\frac{\sigma''_{\text{уп}}}{\sigma'_{\text{уп}}} = \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega} \right)^2 \ln \frac{\hbar\omega}{mc^2} \quad (21.4)$$

(ср. [37], § 55).

Заметим, что при частотах $\omega \ll 2mc^2$, когда реальные пары позитронов и электронов рождаться не могут, эффект поляризации вакуума может быть описан с помощью тензора диэлектрической постоянной вакуума ϵ_{ik} и тензора магнитной проницаемости μ_{ik} :

$$\epsilon_{ik} = \delta_{ik} + \frac{1}{\mathcal{E}_0^2} \{ 2(\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2) \delta_{ik} + 7\mathcal{H}_i \mathcal{H}_k \}, \quad (21.5)$$

$$\mu_{ik} = \delta_{ik} + \frac{1}{\mathcal{E}_0^2} \{ 2(\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2) \delta_{ik} - 7\mathcal{H}_i \mathcal{H}_k \}, \quad (21.5')$$

где \mathcal{E} , \mathcal{H} — напряженности электрического и магнитного полей, \mathcal{E}_i и \mathcal{H}_i [$i=1, 2, 3$] — проекции этих векторов на оси координат, \mathcal{E}_0 — некоторое критическое поле, определяемое по порядку величины соотношением

$$e\mathcal{E}_0 \frac{\hbar}{mc} = 2mc^2, \quad (21.6)$$

т. е. разность потенциалов в таком поле на протяжении \hbar/mc равна энергии, необходимой для рождения пар. Таким образом, в результате поляризации вакуума вокруг заряженной частицы создается связанная с ней заряженная «атмосфера», протяженность которой определяется комптоновской длиной волны электронов \hbar/mc .

В силу этого явления частица теряет свою точечную природу.

В частности, если мы представим себе, что частица локализована в очень узком волновом пакете, размеры которого меньше \hbar/mc , то ситуация будет соответствовать рассмотренному выше случаю покоящейся тяжелой частицы: вокруг частицы в области порядка \hbar/mc создается заряженная зона, за счет которой может осуществиться взаимодействие такой частицы с частицей зонда, и поэтому будет возникать неустранимая неопределенность в определении положения частицы, равная по порядку величины

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{mc} = 3,86 \cdot 10^{-11} \text{ см.} \quad (21.7)$$

В случае электромагнитных взаимодействий эта атмосфера очень «разрежена», что следует из малости константы электромагнитных взаимодействий $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$. Поэтому случаи взаимодействия в «атмосфере» частицы в области поляризации вакуума будут крайне редки по сравнению со случаями точечного взаимодействия: в подавляющем большинстве случаев неопределенность в определении координат частицы не будет связана с протяженностью атмосферы частицы.

В частности, поправки к рассеянию электронов, к комптон-эффекту, к тормозному излучению и другим электромагнитным эффектам, обусловленным поляризацией вакуума в окрестности электрона (или позитрона), весьма малы (см. [37]).

§ 22. Электромагнитная структура нуклонов

Совсем иная ситуация имеет место в тех случаях, когда протяженность атмосферы частицы возникает за счет сильных взаимодействий. Из-за значительной величины константы сильных взаимодействий g ($g^2/4\pi\hbar c = 16$) атмосфера, возникающая вокруг сильно взаимодействующих частиц, ни в коем случае не является разреженной.

Иллюстрацией к этому утверждению может служить электромагнитный форм-фактор *) нуклонов, определяю-

*) Этот термин заимствован из теории рассеяния рентгеновских лучей. «Форм-фактор» учитывает в этой теории неточечный характер распределения зарядов и токов внутри атомов.

щий распределение токов и зарядов в нуклоне. Диаграмма Фейнмана на рис. 17, а представляет процесс рассеяния на протоне, причем электрон считается точечным. Линии 3 и 4 суть линии, изображающие рассеивающийся электрон; 1 и 2 — линии протона, Γ — вершинная часть, которая изображена заштрихованным треугольником, чтобы подчеркнуть протяженный характер нуклона, q —

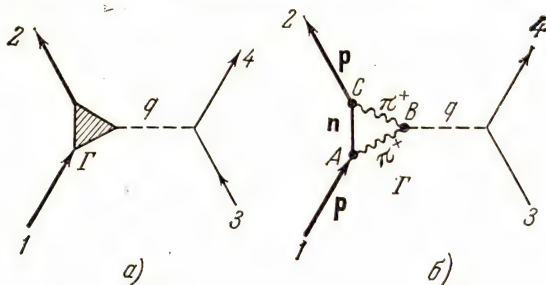


Рис. 17. а) Жирная линия 1—2 — линия протона; q — виртуальный фотон; линия 3—4 — линия рассеивающегося на протоне электрона, Γ — вершина, область около протона, излучающая или поглощающая виртуальный фотон, б) Эта диаграмма вскрывает структуру вершины Γ (в первом приближении); в вершине A излучается π^+ -мезон, который в вершине B излучает виртуальный фотон q в вершине C π^+ -мезон поглощается виртуальным нейтроном (линия AC), который превращается в рассеянный протон (2).

линия виртуального фотона, обеспечивающего обмен импульсом между протоном и электроном. На рис. 17, б) приведена диаграмма, которая поясняет происхождение протяженности нуклона: в узле A протон посредством сильного пион-нуклонного взаимодействия испускает π^+ -мезон и превращается в нейтрон (линия n); π^+ -мезон в точке B испускает (или поглощает) виртуальный квант q , и, наконец, в точке C этот мезон поглощается нейтроном, который превращается в рассеянный протон (линия 2). Благодаря описанному процессу вокруг протона создается пионная атмосфера, которая и порождает эффект протяженности нуклона. Размер этой атмосферы определяется комптоновской длиной волны мезона $\hbar/mc = 1,4 \cdot 10^{-13}$ см.

Рассмотренная нами диаграмма, поясняющая происхождение протяженности нуклона, имеет условное зна-

чение: благодаря значительной величине константы взаимодействия пионного и нуклонного полей вклад других диаграмм, описывающих процессы с большим числом виртуальных мезонов, не может быть малым. Кроме того, оказываются существенными резонансы во взаимодействиях этих мезонов между собою. По этой причине расчет эффектов, обязанных своим существованием мезонной атмосфере нуклона, представляет значительные и еще не преодоленные до конца трудности.

Однако можно построить феноменологическую теорию мезонной атмосферы нуклона в терминах форм-факторов. Для этой цели вычислим матричный элемент от вершинной частицы $\Gamma_\mu(x_2, x_1, y)$, не ограничивая себя простейшими диаграммами, типа изображенной на рис. 17, б, так как такое ограничение в случае сильных взаимодействий вообще не обосновано *).

Величина $\Gamma_\mu(x_2, x_1, y)$ представляет собою нуклонный ток с учетом всех эффектов взаимодействия с вакуумом. Удобнее вычислить матричный элемент от энергии взаимодействия этого тока с полем виртуального фотона, которое мы будем описывать вектор-потенциалом

$$A_\mu(y) = a_\mu(q) e^{-iqy}. \quad (22.1)$$

Эта энергия взаимодействия равна

$$W(x_2 - x_1) = \int \Gamma_\mu(x_2, x_1, y) A_\mu(y) d^4y. \quad (22.2)$$

Заметим, что в силу однородности вакуума величина Γ_μ трансляционно инвариантна и, следовательно, зависит лишь от разности координат x_2, x_1, y ; поэтому мы можем вместо этих координат ввести более удобные $x = x_2 - x_1$ и $X = y - \frac{x_2 + x_1}{2}$. Тогда

$$\Gamma_\mu(x_2, x_1, y) \equiv \Gamma_\mu(X, x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\Gamma}_\mu(\alpha, \beta) e^{i(\alpha X + \beta x)} d^4\alpha d^4\beta, \quad (22.3)$$

так что $\tilde{\Gamma}_\mu(\alpha, \beta)$ есть фурье-образ от $\Gamma_\mu(X, x)$.

*) В дополнении VA для пояснения приведено вычисление вершины $\Gamma_\mu(x_2, x_1, y)$ на основе теории возмущений (диаграмма рис. 17, б); это простое вычисление годилось бы в случае слабой связи между нуклонами и мезонами.

Условие сохранения тока, эквивалентное калибровочной инвариантности, требует, чтобы

$$\frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial y_\mu} \equiv \frac{\partial \Gamma_\mu}{\partial X_\mu} = 0 \quad (22.4)$$

или

$$\tilde{\Gamma}_\mu(\alpha, \beta) \alpha_\mu = 0. \quad (22.4')$$

Вычислим теперь матричный элемент от энергии $W(x_2 - x_1)$ для перехода нуклона из состояния с импульсом $p_1 = p_i$ в состояние с импульсом $p_2 = p_f$. Эти состояния описываются спинорами

$$\bar{\psi}_f(x_2) = u_f(p_f) e^{ip_f x_2}, \quad \psi_i(x_1) = u_i(p_i) e^{-ip_i x_1}. \quad (22.5)$$

Имеем

$$(f | W | i) = \int \bar{\psi}_f(x_2) W(x_2 - x_1) \psi_i(x_1) d^4 x_2 d^4 x_1. \quad (22.6)$$

Подставляя сюда $W(x_2 - x_1)$ из (22.2) и пользуясь (22.3), получим

$$(f | W | i) = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i + q) \bar{u}_f(p_f) \tilde{\Gamma}_\mu(q, P) u_i(p_i) a_\mu(q). \quad (22.7)$$

Таким образом,

$$(f | \Gamma_\mu | i) = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i - q) \bar{u}_f(p_f) \tilde{\Gamma}_\mu(q, P) u_i(p_i), \quad (22.8)$$

где $\alpha \equiv q = p_f - p_i$ есть передаваемый при взаимодействии импульс, а $\beta \equiv P \equiv p_f + p_i$ — сумма конечного и начального импульсов.

Определим теперь структуру вектора тока:

$$J_\mu = \bar{u}_f(p_f) \tilde{\Gamma}_\mu(q, P) u_i(p_i). \quad (22.9)$$

Заметим, что для построения этого вектора в нашем распоряжении имеются матрицы Дирака γ_μ , $\sigma_{\mu\nu}$ и векторы $q = p_f - p_i$, $P = p_f + p_i$ (матрицы Дирака γ_5 и $\gamma_5 \gamma_\mu$ приводят к псевдовекторам); таким образом, ток имеет вид

$$J_\mu = \bar{u}_f(p_f) \{a q_\mu + b P_\mu + c \gamma_\mu + d \sigma_{\mu\nu} q_\nu + e \sigma_{\mu\nu} P_\nu\} u_i(p_i), \quad (22.10)$$

где коэффициенты a , b , c , d и e — скаляры. Используя уравнение Дирака для спиноров $\bar{u}_f(p_f)$ и $u_i(p_i)$ и дополнительное условие (22.4'), которое теперь гласит:

$$J_\mu q_\mu = 0, \quad (22.4'')$$

можно упростить выражение (22.10) и свести его к виду

$$J_\mu = \bar{u}_f(p_f) \{B(q^2) \gamma_\mu + C(q^2) \sigma_{\mu\nu} q_\nu\} u_i(p_i) \quad (22.11)$$

(см. дополнение ВБ). Здесь $B(q^2)$ и $C(q^2)$ — единственные форм-факторы, которые остаются после упрощения исходной формулы (22.10). Для точечной частицы с зарядом e и с аномальным магнитным моментом μ имеем $B(0) = e$, $C(0) = i\mu$. Поэтому удобно принять следующую нормировку для форм-факторов:

$$B(q^2) = eF_1(q^2), \quad (22.12)$$

$$C(q^2) = i\mu F_2(q^2), \quad (22.13)$$

$$F_1(0) = F_2(0) = 1. \quad (22.14)$$

При этой нормировке нуклонный ток принимает вид

$$J_\mu = \bar{u}_f(p_f) \{eF_1(q^2) \gamma_\mu + i\mu F_2(q^2) \sigma_{\mu\nu} q_\nu\} u_i(p_i). \quad (22.15)$$

Обратимся к случаю, когда обмен импульсом q рассматривается в системе центра масс частиц. В случае упругого рассеяния электронов на протонах это будет система центра масс электрона и протона. В этой системе абсолютная величина импульсов частиц остается неизменной, изменяется только их направление, так что $|p_f| = |p_i|$, и, следовательно, четвертая компонента вектора q равна нулю ($q = (q, 0)$, $q = q_f - q_i$, $q^2 = q^2$). В этой системе координат мы можем определить пространственный образ нуклона; именно пространственный образ для распределения плотности электрического заряда $\rho(X)$ будет

$$\rho(X) = e \int F_1(q^2) \exp(iqX) \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \quad (22.16)$$

и для распределения магнитного момента $\mu(X)$

$$\mu(X) = \mu \int F_2(q^2) \exp(iqX) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \quad (22.16')$$

Из этих формул видно, что

$$\int \rho(X) d^3X = eF_1(0) = e, \quad (22.17)$$

$$\int \mu(X) d^3x = \mu F_2(0) = \mu. \quad (22.17')$$

На основании (22.16) и (22.16') можно определить средний квадратичный электрический радиус нуклона $\langle r^2 \rangle_e$

и средний квадратичный магнитный радиус $\langle r^2 \rangle_\mu$ посредством формул

$$\langle r^2 \rangle_e = \frac{1}{e} \int \rho(X) r^2 d^3X = \frac{1}{6} \left(\frac{dF_1}{dq^2} \right)_0, \quad (22.18)$$

$$\langle r^2 \rangle_\mu = \frac{1}{\mu} \int \mu(X) r^2 d^3X = \frac{1}{6} \left(\frac{dF_2}{dq^2} \right)_0. \quad (22.18')$$

Последние выражения получаются на основании фурье-разложений (22.17) и (22.17') дифференцированием их по q^2 .

Из формул (22.16) и (22.16') следует, что форм-фактор $F_1(q^2)$ определяет размазывание в пространстве электрического заряда нуклона, а форм-фактор $F_2(q^2)$ — размазывание его магнитного момента.

Таким образом, форм-факторы F_1 и F_2 отображают пространственно-временную структуру нуклонов. Эта структура была впервые обнаружена экспериментально при изучении рассеяния электронов в водороде и в дейтерии в знаменитых работах

Р. Хофштадтера (см. 40—42)]. Основной результат его исследований сводится к тому, что

$$F_{1p}(q^2) = F_{2p}(q^2), \quad (22.19)$$

$$F_{1n}(q^2) \approx 0, \quad F_{2n}(q^2) \approx F_{1p}(q^2), \quad (22.19')$$

где индексом p отмечены форм-факторы для протона, а индексом n — те же форм-факторы для нейтрона. На рис. 18 приведены современные данные об электромагнитных форм-факторах нуклонов [43]. Электрические радиусы оказываются равными: для протона $r_e = \sqrt{\langle r^2 \rangle_e} = 0,8 \cdot 10^{-13}$ см, для нейтрона $r_e = 0$. Магнитные радиусы $r_\mu = \sqrt{\langle r^2 \rangle_\mu}$ у них одинаковы и равны r_e .

Определенная формулами (22.16) и (22.16') пространственная структура нуклонов носит несколько условный характер. Эта условность вытекает из того обстоятельства,

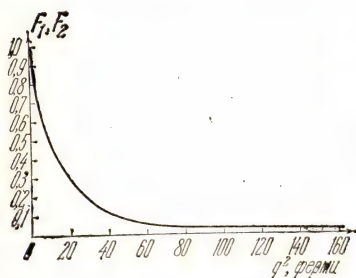


Рис. 18. Кривая изображает форм-факторы F_1 и F_2 как функции квадрата передаваемого импульса q^2 ; в пределах ошибок опыта F_1 и F_2 изображаются одной и той же кривой.

что с точки зрения квантовой теории поля электромагнитная структура нуклона описывается вершинной функцией $\Gamma_\mu(X, x)$, являющейся функцией двух переменных: $X = y - \frac{x_1 + x_2}{2}$, $x = x_2 - x_1$, а не одной переменной; далее, эта структура описывается динамически, с учетом движения нуклона в процессе его взаимодействия с виртуальным фотоном.

В дополнении VA рассмотрена подробнее связь между вершиной $\Gamma_\mu(X, x)$ и плотностями $\rho(X)$, $\mu(X)$, определяемыми формулами (22.16) и (22.16'). Именно там показано, что эти формулы имеют прямой физический смысл для тяжелого нуклона и для малых передач импульса $q^2 \ll 4M^2$ (M — масса нуклона). В этом случае плотность $\rho(X)$ может быть представлена формулой

$$\rho_\mu(X) = \int \bar{\Gamma}_\mu(q, 2M) e^{iqX} d^3q, \quad (22.20)$$

в которой в явном виде учтено предположение $q^2 \ll 4M^2$.

Вернемся теперь к нашей теме — к вопросу об измерении положения нуклона. Из-за конечности размеров пионной атмосферы нуклона, как бы точно ни была локализована частица в пучке-зонде, по наблюдению рассеяния этой пробной частицы нельзя определить положение нуклона точнее, чем в пределах его размеров $\Delta x \approx r_e$. В рассматриваемом случае электромагнитных взаимодействий радиус взаимодействия, строго говоря, бесконечно велик; эта особенность электромагнитного (кулоновского и магнитного) взаимодействия сама по себе будет серьезным препятствием для определения положения нуклона в мысленном эксперименте, иллюстрированном на рис. 14. Однако это обстоятельство не имеет принципиального значения. Вместо электромагнитного взаимодействия можно рассмотреть слабое взаимодействие, которое является контактным, точечным взаимодействием. Однако, как мы сейчас покажем, в это взаимодействие входят те же форм-факторы $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$, которые характерны и для электромагнитного взаимодействия.

Для определенности рассмотрим процесс, обратный процессу захвата μ -мезона протоном p :

$$p + \nu \rightarrow p + \mu^-, \quad (22.21)$$

Здесь n — нейтрон, ν — нейтрино. Исходные частицы нейтральны, и поэтому эффекты, связанные с электромагнитным взаимодействием, отсутствуют.

Взаимодействие, описывающее этот процесс, является контактным и имеет вид [44]

$$W = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^s J_\mu^w, \quad (22.22)$$

где G_F есть константа слабого взаимодействия, $G_F = g_F/\hbar c (mc/\hbar)^2$, m — масса нуклона, $g_F = 2 \cdot 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3$ есть константа Ферми; эта константа может быть выражена через длину $\Lambda_F = \sqrt{g_F/\hbar c} = 0,6 \cdot 10^{-16} \text{ см}$, характерную для слабого взаимодействия. J_μ^s есть нуклонный («сильный») ток:

$$J_\mu^s = \bar{\psi}_N J_\mu \tau^+ \psi_N \quad (\mu = 1, 2, 3, 4). \quad (22.23)$$

Здесь $\bar{\psi}_N$, ψ_N суть нуклонные волновые функции (протона или нейтрона); оператор \hat{J}_μ для точечных нуклонов имеет вид

$$\hat{J}_\mu = e\gamma_\mu + i\mu\sigma_{\mu\nu}q_\nu. \quad (22.24)$$

Далее, τ^+ есть оператор изотопического спина, превращающий нейтрон в протон (т. е. он меняет значок $N=p$ на $N=n$).

Ток J_μ^w есть «слабый» ток и имеет вид

$$J_\mu^w = \bar{\psi}_\nu \hat{O}_\mu \psi_\mu. \quad (22.25)$$

где $\bar{\psi}_\nu$ — волновая функция нейтрино, ψ_μ — волновая функция μ -мезона; \hat{O}_μ — оператор, составленный из матриц γ_μ и γ_5 (см. подробности в [44]).

Наличие оператора $\tau^+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2)$ (для обратного перехода фигурировал бы оператор $\tau^- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2)$) указывает, что J_μ^s является линейной комбинацией компонент изотопического векторного тока $J_{\mu 1}^s$, $J_{\mu 2}^s$, $J_{\mu 3}^s$:

$$J_{\mu\sigma}^s = \bar{\psi}_N \hat{J}_\mu \tau_\sigma \psi_N, \quad (22.23')$$

где $\sigma = 1, 2, 3$. Однако компоненты тока $J_{\mu 3}^s$ в точности соответствуют электромагнитному току, поэтому оператор \hat{J}_μ (см. (22.24)) должен содержать те же форм-фак-

торы $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$, которые характерны для нуклонов (см. (22.19) и (22.19')); иными словами, в токе J_μ^s учитывается заряженная пионная атмосфера нуклона. В силу этого обстоятельства контактный характер взаимодействия (22.22) нарушается и оно становится нелокальным.

Диаграммы Фейнмана, отображающие контактное взаимодействие (22.22) и взаимодействие с учетом конечных размеров нуклона, приведены на рис. 19, а, б.

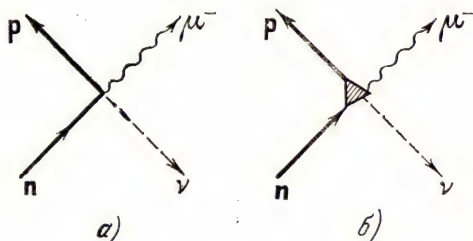


Рис. 19. Диаграммы, описывающие слабое взаимодействие (процесс $n + \nu \rightarrow p + \mu^-$). а) Диаграмма для контактного взаимодействия; б) диаграмма, учитывающая конечные размеры нуклона (его форм-фактор).

Благодаря возникновению пространственно-временного распределения нуклонных зарядов и токов в вершине Г, даже в мысленном эксперименте, допускающем как угодно узкий пакет нейтрино, служащий зондом для определения положения нуклона, невозможно определить место рассеяния нейтрино точнее в пределах размера нуклона, т. е. в области $\Delta x \sim r_e$ (или r_μ). Таким образом, мы видим, что существование форм-факторов элементарных частиц, отображающих их пространственно-временную структуру, приводит к принципиальной невозможности локализовать элементарную частицу в пространстве — времени точнее, нежели в пределах ее размеров, т. е. точнее, чем с точностью

$$\Delta x \sim r_0, \quad \Delta t \sim \frac{r_0}{c}, \quad (22.26)$$

где r_0 — радиус частицы.

§ 23. Мезонная структура нуклонов

В этом разделе мы обратимся к теории упругого рассеяния пионов на нуклонах в области высоких энергий (выше порога рождения мезонов). В этом случае определяющее значение имеют неупругие процессы, так что упругое рассеяние оказывается дифракционным. Соответственно этому амплитуда рассеяния $T(E_\pi, q)$ будет чисто мнимой (E_π — энергия мезона в системе центра масс, $E_\pi = \sqrt{m^2 + k^2}$, а q — переданный импульс, $|q| = 2k \sin \vartheta/2$, ϑ — угол рассеяния) и может быть прямо выражена через дифференциальное сечение упругого рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |T(E_\pi, q)|^2 = T^2(E_\pi, q). \quad (23.1)$$

Таким образом, имея экспериментальные данные для $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, можно найти амплитуду $T(E_\pi, q)$. С другой стороны, эта амплитуда, как известно, представляется рядом по полиномам Лежандра $P_l(\cos \vartheta)$:

$$T(E_\pi, q) = \frac{1}{2ki} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - e^{2i\eta_l}) P_l(\cos \vartheta), \quad (23.2)$$

где

$$\eta_l(k) = \delta_l(k) + i\gamma_l(k), \quad \gamma_l \geq 0, \quad (23.2')$$

есть комплексная фаза. В случае достаточно коротких волн ($\lambda \ll a$, a — размер рассеивающей волны системы) сумму по l можно заменить интегралом, полагая $l\Delta l \rightarrow b db / \lambda^2 = k^2 b db$, где b — параметр удара. Далее, при больших l и малых ϑ полином $P_l(\cos \vartheta)$ можно заменить на функцию Бесселя

$$J_0(l \sin \vartheta) \approx J_0(bq).$$

Тогда (23.2) переписывается в виде

$$T(E_\pi, q) = \frac{k}{2i} \int_0^\infty b db [1 - e^{-2i\eta(b, k)}] J_0(bq). \quad (23.3)$$

В силу ортогональности функций Бесселя $J_0(bq)$ это интегральное соотношение может быть обращено:

$$1 - e^{2i\eta(b, k)} = \frac{2i}{k} \int_0^\infty T(E_\pi, q) J_0(bq) q dq. \quad (23.4)$$

Таким образом, из опыта можно определить фазу $\eta(b, k)$ как функцию энергии мезона $k = \sqrt{E^2 - m^2}$ и

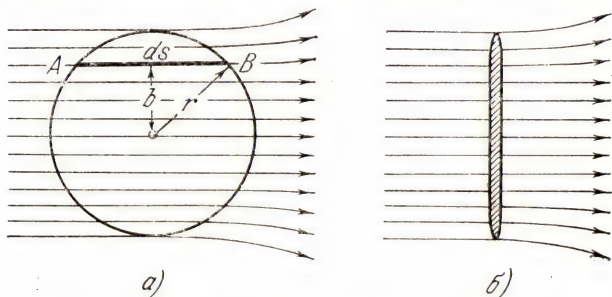


Рис. 20. а) Сфера очерчивает нуклон, AB — путь луча внутри нуклона, b — параметр удара; б) частично поглощающий экран, эквивалентный нуклону; этот экран дает ту же дифракционную картину (для малых углов рассеяния), что и реальный нуклон.

параметра удара b . С другой стороны, в пределах геометрической оптики изменения фазы первичной волны $2\eta(b, k)$ могут быть вычислены интегрированием по лучу показателя преломления n :

$$2\eta(b, k) = \int_A^B n(k, x) ds. \quad (23.5)$$

На рис. 20 указан путь интегрирования внутри нуклона.

В работах [42, 45] был проведен анализ экспериментальных данных по рассеянию пионов на нуклонах (π^+p). Результат этого анализа приведен на рис. 21, где по оси ординат отложен коэффициент поглощения $K(r)$ — мнимая часть коэффициента преломления n (действительная его часть в рассматриваемом случае крайне мала) — в функции расстояния от центра нуклона r в системе центра масс. Как видно, поглощение убывает по мере удаления от центра нуклона и практически исчезает за

пределами $r \approx 0,7 \cdot 10^{-13}$ см. Совпадение этой величины с данными об электромагнитном радиусе нуклона ($r_e = r_\mu = 0,8 \cdot 10^{-13}$ см) указывает на то, что поглощение

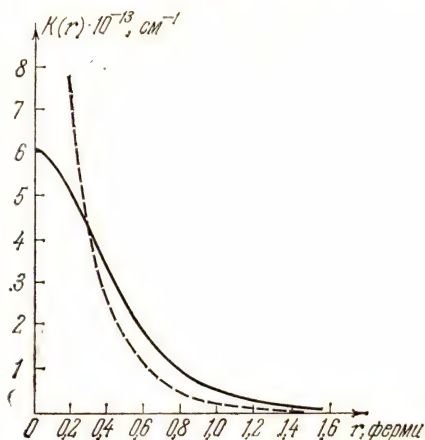


Рис. 21. Сплошная кривая — коэффициент поглощения пионов $K(r)$ как функция расстояния от центра нуклона r для энергии пионов $E = 1,3$ Гэв; штриховая кривая — то же для энергии пионов $E = 5$ Гэв.

мезонов нуклоном и распределение токов и зарядов в нуклоне вызвано одной и той же физической причиной — мезонной атмосферой нуклона.

В какой мере может быть обоснована рассмотренная выше простая оптическая картина взаимодействия мезонов с нуклонами?

Современная теория поля не открывает прямых путей для расчета сильных взаимодействий, к классу которых относится взаимодействие π -мезонов с нуклонами. Поэтому можно дать лишь условное обоснование, характерное для приемов современной теории: 1) допустить малость константы взаимодействия g (условие, необходимое для обеспечения сходимости рядов), 2) допустить возможность перенормировок в каждом из приближений по степеням g , 3) в полученных окончательных уравнениях отказаться от ограничений на величину константы g .

Следуя по этому пути, мы придем к уравнению, которое будет иметь вполне определенную структуру, но для практического применения потребует еще дополнительных предположений [46] *). Это уравнение, как показано в дополнении VI, имеет вид

$$(E_\pi^2 - \hat{K}^2) \psi(\mathbf{x}) = \int U(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; E) \psi(\mathbf{x}') d^3x', \quad (23.6)$$

где $\hat{K}^2 = -\nabla^2 + m^2$ (m — масса мезона), $E = E_\pi + E_N$, E_N — энергия нуклона в той же системе, $U(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; E)$ — нелокальный, вообще говоря, комплексный потенциал, действующий со стороны нуклона на мезон; $\psi(\mathbf{x})$ — волновая функция для относительного движения нуклона и мезона, взятая при совпадающих временах, так что $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, $t = t_2 - t_1 = 0$.

Эквивалентное другое уравнение гласит:

$$(E_N - \hat{\mathcal{H}}_N) \psi(\mathbf{x}) = \int V(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; E) \psi(\mathbf{x}') d^3x', \quad (23.7)$$

где $\hat{\mathcal{H}}_N$ — оператор Дирака, $\hat{\mathcal{H}}_N = \alpha \mathbf{p} + \beta M c^2$, здесь M — масса нуклона, а $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; E)$ — потенциал, действующий со стороны мезона на нуклон.

Связь между $U(\mathbf{x}', \mathbf{x}; E)$ и $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; E)$ также описана в дополнении VI. Неполнота теории, лежащей в основе уравнений (23.6) и (23.7), выражается в том, что эти нелокальные и комплексные потенциалы могут быть вычислены в явном виде только в виде ряда по степеням константы взаимодействия g . Отказываясь от предположения о малости константы g , мы должны делать специальные предположения о виде U или V . Подобная ситуация имеет место в теории атомного ядра, где сложное взаимодействие нуклонов заменяется потенциальной ямой, описывающей это взаимодействие усредненным образом.

Если длина волны λ относительного движения частиц существенно больше размера области a , где нелокальные

*) Подобный путь применяется и в теории дисперсионных соотношений. Необходимая для обоснования аналитических свойств амплитуда рассеяния матрицы рассеяния строится по теории возмущений и предполагает малость взаимодействия. Сами же дисперсионные соотношения применяются в области сильных взаимодействий, без ограничений на величину константы взаимодействия.

потенциалы U или V существенно отличны от нуля, то уравнения (23.6) и (23.7) принимают крайне простой вид:

$$(E_{\pi}^2 - \hat{K}^2) \psi(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}, E) \psi(\mathbf{x}), \quad (23.6')$$

$$(E_N - \hat{\mathcal{H}}_N^0) \psi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}, E) \psi(\mathbf{x}), \quad (23.7')$$

где

$$U(\mathbf{x}, E) = \int U(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; E) \frac{\psi(\mathbf{x}')}{\psi(\mathbf{x})} d^3x', \quad (23.8)$$

$$V(\mathbf{x}, E) = \int V(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; E) \frac{\psi(\mathbf{x}')}{\psi(\mathbf{x})} d^3x' \quad (23.8')$$

и отношение $\psi(\mathbf{x}')/\psi(\mathbf{x})$ под знаком интеграла заменено на единицу. Уравнения (23.6') и (23.7') имеют вид уравнений Шредингера (или Дирака) с комплексным, зависящим от энергии потенциалом $U(\mathbf{x}, E)$ (или $V(\mathbf{x}, E)$).

Уравнения (23.6) и (23.7) упрощаются и в другом крайнем случае, при $\lambda \ll a$. Заметим, что это условие в силу соотношения, справедливого для коротких волн:

$$\sigma = \pi a^2 (1 - \beta), \quad (23.9)$$

где σ — сечение упругого рассеяния, β ($0 < \beta < 1$) — прозрачность нуклона, может быть написано в виде

$$\frac{a}{\lambda} = \left[\frac{\sigma}{\pi(1-\beta)} \right]^{1/2} \frac{1}{\lambda} \gg 1. \quad (23.9')$$

При соблюдении этого условия представим волновую функцию в форме, характерной для геометрической оптики, именно положим

$$\psi(\mathbf{x}) = \exp \{ikS(\mathbf{x})\}, \quad (23.10)$$

где $S(\mathbf{x})$ — функция действия, $k = \frac{1}{\lambda}$. Подставляя (23.10) в (23.6), соберем члены при степенях k^2 (считая, что $k^2 \rightarrow \infty$). Члены при k^2 дают уравнение эйконала:

$$(\nabla S)^2 = n^2, \quad (23.11)$$

где n — комплексный показатель преломления, подчиняющийся уравнению

$$1 - n^2 = \frac{1}{k^2} \int U(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; E) \exp ik \{S(\mathbf{x}') - S(\mathbf{x})\} d^3x'. \quad (23.12)$$

Разложим разность $S(\mathbf{x}') - S(\mathbf{x})$ и показатель экспоненты под интегралом по степеням $(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$:

$$S(\mathbf{x}') - S(\mathbf{x}) = \nabla S(\mathbf{x}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \dots = n\rho \cos \theta + \dots, \quad (23.13)$$

где $\rho = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$. Тогда выражение (23.12) примет вид

$$1 - n^2 = \frac{1}{k^2} \int U(x, x + \rho, E) e^{ikn\rho \cos \theta} d^3\rho. \quad (23.14)$$

Подставляя справа вместо показателя преломления $n = 1$, получим первое приближение для $n^2 - 1$. Далее результат можно уточнять итерацией. Полагая $n = \alpha + i\beta$, нетрудно убедиться, что необходимым условием сходимости итерации будет $k\beta \rightarrow \text{const}$ при $k \rightarrow \infty$.

Основываясь на оптической теореме, согласно которой мнимая часть амплитуды $T(E_\pi, q)$ упругого рассеяния вперед (т. е. при $q = 0$) связана с полным сечением σ_π соотношением *)

$$\text{Im } T(E_\pi, 0) = \frac{k}{4\pi} \sigma_\pi \quad (23.15)$$

(здесь $E_\pi = \sqrt{m^2 + k^2}$), и пользуясь тем опытным фактом, что полное сечение πN -взаимодействия не возрастает с ростом энергии E_π , а стремится к постоянной величине, можно показать, что величина $k\beta$ при $k \rightarrow \infty$ убывает и тем самым необходимое условие сходимости в (23.14) обеспечено [47].

Изложенный здесь оптический подход к описанию пространственной структуры мезонной атмосферы нуклона является лишь одним из возможных аспектов изучения этой структуры [48].

Количественные и качественные выводы, получаемые из оптической модели нуклона, таким образом, находятся в согласии с основами квантовой теории мезонного поля.

§ 24. Структура частиц в теории квантованных полей

Структура элементарных частиц изучается посредством упругого рассеяния частиц, служащих частицами-зондами.

*) Эта теорема есть следствие свойства унитарности матрицы рассеяния; см. дополнение XII(4).

Современная теория отдельно рассматривает три вида взаимодействий: сильное, электромагнитное и слабое. В силу этого мы вынуждены говорить о трех типах структур элементарных частиц соответственно этим трем типам взаимодействий.

Понятие структуры элементарной частицы отличается от классического понятия структуры того или иного объекта. Основанием для этого служат следующие обстоятельства.

Из экспериментальных данных по упругому рассеянию частиц восстанавливается амплитуда рассеяния T_{fi} , соответствующая переходу рассеивающихся частиц из некоторого начального состояния i в конечное f . Восстановление этой амплитуды из опытных данных само по себе представляет серьезную проблему, известную под названием полного опыта [49].

Амплитуда T_{fi} есть функция двух инвариантов: $s = P^2$ (P — полный импульс рассеивающихся частиц) и $t = -q^2$, где q есть переданный при рассеянии импульс, равный разности конечного и начального импульсов одной из частиц: $q = p_f - p_i$, т. е.

$$T_{fi} = A(t, s). \quad (24.1)$$

Информация, содержащаяся в амплитуде, относится к обоим состояниям изучаемой частицы, i и f , отличающимся импульсами p_i и p_f . Поэтому эта информация преподносится нам в виде интерференции двух структур, в классическом понимании относящихся к двум различным состояниям движения изучаемой частицы. Из общеизвестных «оптических» соображений следует, что мы можем рассчитывать на получение информации о пространственно-временной структуре объекта в масштабах b только в том случае, если изучаются события, акты рассеяния, при которых переданный импульс $q \geq \hbar/b$. Величину b мы можем рассматривать как параметр удара. Длительность столкновения будет определяться временем порядка $\tau = b/v$, где v — скорость частицы зонда, близкая к скорости света.

За время τ изучаемая частица сместится на расстояние порядка $l \approx b/v \cdot p/M$, где p — приобретенный ею импульс, а M — ее масса. Для того чтобы «структура» относилась к исходному состоянию частицы-объекта, не-

обходимо, чтобы $l \ll b$; нетрудно видеть, что это равносильно требованию $\hbar/M \cdot p/q \ll b$, а так как импульсы p и q одного порядка, то получается, что

$$b \gg \hbar/Mv, \quad (24.2)$$

т. е. мы можем изучать *классическую структуру* частицы только в масштабах b , существенно превышающих комптоновскую длину волны изучаемого объекта. Эта качественная оценка согласуется с более основательной оценкой, данной в дополнении V к § 22 в связи с описанием электромагнитной структуры нуклона.

Другая сторона дела заключается в том, что по мере увеличения энергии частицы-зонда, а следовательно, и по мере увеличения верхней границы передаваемого импульса $|q|_{\max} = 2p$ (здесь p — относительный импульс частицы-зонда и частицы-объекта) возрастает относительная роль неупругих процессов и картина объекта, наблюдаемая по рассеянию частиц, приобретает характер дифракционной картины от сильно поглощающего тела. Как было замечено в работе [45], если в некоторой области $b < R$ поглощение становится полным, так что эта область может рассматриваться как абсолютно черное тело, то вместе с этим всякая информация о структуре этой области сводится к нулю *). Величину R можно назвать «элементарной длиной», обусловленной динамикой неупругих процессов.

Поэтому поведение отношения сечения упругих процессов σ_y к полному сечению σ_n при неограниченном возрастании энергии ($s \rightarrow \infty$)

$$\lim \frac{\sigma_y}{\sigma_n} = ? \quad (24.3)$$

может иметь принципиальное значение для будущей теории. Важным также является вопрос о поведении сечения неупругих процессов σ_{ny} . Если бы $\sigma_{ny} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то это означало бы, что элементарные частицы при предельно высоких энергиях становятся прозрачными и «абсолютная чернота» исчезает; если же $\lim \sigma_{ny} > 0$, то при

*) Заметим, что для разных взаимодействий это состояние может наступать (если вообще наступает) при существенно различных энергиях и существенно различных масштабах.

столкновении элементарных частиц могли бы возникать за счет их высокой энергии макроскопические количества материи, вплоть до целых вселенных. В этом случае элементарные процессы оказались бы способными порождать процессы макроскопические и обнаружилось бы общее поле активности микро- и макромира [51]. Однако «*reviens à nos moutons*» *). Чтобы глубже заглянуть в динамику упругого рассеяния при высокой энергии, представим себе, что мы в состоянии суммировать все высшие

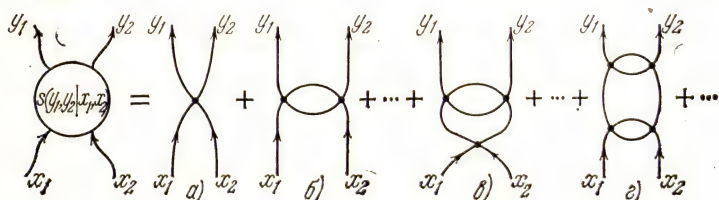


Рис. 22. Слева — функция $s(y_1, y_2 | x_1, x_2)$, справа — ее разложение по диаграммам Фейнмана: а) диаграмма первого порядка по g ; б) одна из диаграмм второго порядка (g^2); в) одна из диаграмм третьего порядка (g^3); г) одна из диаграмм четвертого порядка (g^4) и т. д.

диаграммы Фейнмана, дающие вклад в амплитуду упругого рассеяния. В качестве иллюстрации на рис. 22 приведены эти диаграммы для поля ϕ , описывающего незаряженные скалярные частицы. Энергия взаимодействия в таком поле может быть записана в виде

$$\hat{W} = \frac{g}{3} \hat{\phi}^4, \quad (24.4)$$

где g — некоторая константа связи.

Суммирование подобных диаграмм, взятых в координатном представлении и имеющих две входные линии (x_1 и x_2) и две выходные линии (y_1 и y_2), приводит к функции «четырёххвостке»:

$$s = s(x_4, x_3, x_2, x_1), \quad (24.5)$$

описывающей процесс рассеяния частиц (две частицы в начальном состоянии, две — в конечном).

*) Старая французская поговорка: «Вернемся к нашим баранам».

В дополнении VII показано, что матрица рассеяния \hat{S} , описывающая все возможные процессы со скалярными незаряженными частицами, может быть сведена к совокупности скалярных функций:

$$\hat{S} = \begin{cases} s(x_1), \\ s(x_1, x_2), \\ s(x_1, x_2, x_3), \\ \dots \\ s(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots \end{cases} \quad (24.6)$$

каждая из которых является вакуумным средним по всевозможным процессам взаимодействия частиц, сопровождающимся рождением частиц и их уничтожением.

В силу однородности вакуума эти функции являются функциями только разностей координат $x_{ik} = x_i - x_k$, в частности, $s(x_1) = \text{const}$. Далее, в рассматриваемом случае скалярного поля эти функции зависят лишь от скалярных произведений $x_{ik}x_{nm}$, притом равноправно от всех x_i .

Матричные элементы матрицы рассеяния, описывающие переход из некоторого начального состояния $\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, в котором имеется n частиц, в конечное состояние $\psi_f(y_1, y_2, \dots, y_m)$, в котором имеется m частиц, выражается через функции (24.6) следующим образом:

$$S_{fi} = iT_{fi} = \int \bar{\psi}_f(y_1, y_2, \dots, y_m) \times \\ \times s(y_1, y_2, \dots, y_m | x_1, x_2, \dots, x_n) \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \times \\ \times d^4y_1 d^4y_2 \dots d^4y_m d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n, \quad (24.7)$$

где аргументы функции $s(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $N = n + m$, относящиеся к конечному состоянию f , обозначены теперь через y_1, y_2, \dots, y_m и отделены чертой от аргументов x_1, x_2, \dots, x_n , относящихся к начальному состоянию i . Такие разбиения аргументов функций $s(x_1, x_2, \dots, x_N)$ на принадлежащие начальным и конечным состояниям позволяют записать эти аргументы в виде матрицы, строки которой (y) относятся к конечному состоянию f , а столбцы (x) — к начальному состоянию i :

$\begin{array}{c} x \\ \backslash \\ y \end{array}$		x_1	x_1, x_2	x_1, x_2, x_3	
	1				
y_1		$s(y_1 x_1)$	$s(y_1 x_1, x_2)$...	
y_1, y_2		$s(y_1, y_2 x_1)$	$s(y_1, y_2 x_1, x_2)$...	
y_1, y_2, y_3		

(24.8)

Не все элементы, последовательность которых намечена в таблице, отличны от нуля и не все описывают реальные физические процессы с реальными частицами. Например, взаимодействие (24.4) вообще исключает функции $s(x|y)$ с нечетным числом всех аргументов. Элементы типа $s(y_1 | x_1, x_2, x_3)$ отличны от нуля, но не могут описывать реальный процесс, так как масса покоя частицы (y_1) должна бы быть $> 3m$. Это противоречит предположению о спектре частиц, в котором с самого начала допущены только частицы с массой покоя m . Соответствующий элемент S_{fi} для реальных частиц автоматически обратится в нуль. Мы не будем углубляться в эти частности.

Обратимся к той стороне дела, которая является для нас первостепенной. Допустим, что мы можем сколь угодно точно локализовать частицы в пространстве и времени. Иными словами, допустим, что можно взять волновые функции ψ_f и ψ_i в виде произведения четырехмерных δ^4 -функций:

$$\bar{\psi}_f = \prod_{q=1}^m \delta^4(y_q - y'_q), \quad \psi_i = \prod_{q=1}^n \delta^4(x_q - x'_q). \quad (24.9)$$

Тогда интегрирование в (24.7) сразу выполняется, и мы получим

$$S_{fi} = s(y'_1, y'_2, \dots, y'_m | x'_1, x'_2, \dots, x'_n). \quad (24.10)$$

Отсюда следует, что функции $s(y|x)$ из (24.8) дают наиболее полную информацию о пространственно-времен-

ном течении процесса взаимодействия $N = m + n$ частиц. Поэтому именно эти функции следует рассматривать как функции, дающие полное описание структуры скалярных элементарных частиц, взаимодействующих между собой путем излучения и поглощения подобных себе частиц. Мы могли бы сузить рамки нашего описания, связав с понятием структуры частицы лишь ту из функций $s(y|x)$ из (24.8), которая описывает упругое рассеяние, именно функцию $s(y_1, y_2|x_1, x_2)$. В этом случае одна из частиц может рассматриваться как зондирующая структуру другой. Такая точка зрения возможна, но, конечно, не обязательна. Так или иначе, описание структуры частицы на основе \hat{S} -матрицы носит динамический характер и неотделимо от процессов, с помощью которых эта структура проявляется.

На рис. 22 с помощью графиков Фейнмана для специального случая $\hat{\mathcal{Z}} = g\hat{\varphi}^4$ иллюстрировано это динамическое понимание пространственно-временной структуры частиц. В качестве примера выбрана функция $s(y_1, y_2|x_1, x_2)$. Эта функция представляется суммой вкладов от оператора (24.4), разложенного по степеням g . Каждый такой вклад может быть представлен суммой графиков Фейнмана, имеющих число четверных узлов, равное степени g . Первый график (а) описывает взаимодействие (упругое рассеяние) точечных частиц, следующие графики показывают участие виртуальных частиц, создающих облако вокруг исходных частиц $(x_1, x_2|y_1, y_2)$. Это облако имеет динамический смысл: в каждом из узлов частицы порождают другие частицы, которые в результате последующих превращений, начинающихся с исходных частиц x_1 и x_2 , заканчиваются конечными частицами y_1 и y_2 . Суммирование всех диаграмм и усреднение их по вакууму означает учет всех возможных путей, ведущих из (x_1, x_2) в (y_1, y_2) .

Если теперь обратиться к реальным частицам, то следует вспомнить о существовании трех типов взаимодействий. Одна и та же частица может участвовать в различных взаимодействиях. Например, протон сильно взаимодействует с пионами, электромагнитно — с электроном, посредством слабого взаимодействия — с нейтрино. Этим взаимодействиям отвечают различные \hat{S} -матрицы, и харак-

тер структуры частицы, отображающейся в каждом из этих взаимодействий, может быть своим, специфическим именно для этого взаимодействия. Весьма вероятно, что в дальнейшем будут установлены внутренние связи этих взаимодействий, и тогда различные структуры будут поняты как проявление одной и той же сущности*).

Далее, не следует забывать, что изложенное в этом разделе представление о пространственно-временной структуре частиц базируется на теории, достаточно обоснованной лишь для случая электромагнитных взаимодействий.

Математически это представление опирается на совокупность функций $s(y|x)$ (см. (24.8)), которые могут быть получены из теории, однако являются ненаблюдаемыми величинами. Ненаблюдаемость этих величин вытекает из принципиальной невозможности построить четырехмерные δ -образные волновые пакеты в пространстве и времени (24.9) и использовать их в качестве функций начальных и конечных состояний.

В действительности начальное состояние ψ_i и конечное состояние ψ_f являются суперпозициями плоских волн, для которых $p_0^2 = +\sqrt{m^2 + p^2}$. Поэтому информация относительно функций $s(y|x)$, вытекающая из знания матричных элементов S_{fi} матрицы рассеяния \hat{S} , оказывается крайне ограниченной. Суть дела заключается в том, что спектральное разложение функции S_{fi} в пространстве импульсов $\mathfrak{R}(p)$ составляет лишь малую часть спектрального разложения функций $s(y|x)$ **).

Для более подробного обсуждения этого вопроса обратимся к реальному случаю упругого рассеяния π -мезона на нуклоне. Ввиду различия этих частиц нам будет удобнее записать функцию $s(y|x)$ в виде

$$\tilde{s}(y|x) \equiv s(y_2, x_2 | x_1, y_1), \quad (24.11)$$

где x_1 — координата нуклона в начальном состоянии

$$\psi_i(x_1) = u_i(p_1) e^{ip_1 x_1}, \quad (24.12)$$

*) В атомной физике ядерно-электронная структура атома является единой основой для понимания образа атома как в свете рентгеновских лучей, так и в свете пучка электронов.

**) С подобной ситуацией мы уже встречались при изучении вершины $\Gamma_\mu(X, x)$ (см. § 22).

а x_2 — его координата в конечном состоянии

$$\bar{\psi}_f(x_2) = \bar{u}_f(p_2) e^{-ip_2 x_2}, \quad (24.13)$$

y_1 и y_2 — координаты π -мезона в начальном и конечном состояниях соответственно:

$$\varphi_i(y_1) = \frac{e^{ik_1 y_1}}{\sqrt{\omega_1}}, \quad \bar{\varphi}_f(y_2) = \frac{e^{-ik_2 y_2}}{\sqrt{\omega_2}}. \quad (24.14)$$

Введем теперь новые координаты

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 - x_2, & \xi_1 &= \frac{1}{2} X - \frac{1}{2} (y_1 + y_2), \\ X &= \frac{1}{2} (x_1 + x_2), & \xi_2 &= \frac{1}{2} X - (y_1 - y_2), \end{aligned} \right\} \quad (24.15)$$

так что

$$s(y_2, x_2 | y_1, x_1) = s(x, \xi_1, \xi_2). \quad (24.16)$$

Эта последняя функция имеет спектральное разложение

$$s(x, \xi_1, \xi_2) = \int \bar{s}(\alpha, \beta_1, \beta_2) \exp[i(\alpha x + \beta_1 \xi_1 + \beta_2 \xi_2)] d^4 \alpha d^4 \beta_1 d^4 \beta_2, \quad (24.17)$$

где интегрирование по переменным α, β_1, β_2 не ограничивается поверхностью масс.

Вычисление матричного элемента S_{fi} от функции (24.17) для состояний

$$\psi_f = \psi_f(x_2) \varphi_f(y_2), \quad \psi_i = \psi_i(x_1) \varphi_i(y_1) \quad (24.18)$$

ведет к результату

$$S_{fi} = \delta^4(p_2 + k_2 - p_1 - k_1) \bar{u}_f(p_2) \times \\ \times \frac{\bar{s}\left(-p_1 - k_1, -q, k_1 + \frac{1}{2}q\right)}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} u_i(p_1). \quad (24.19)$$

Таким образом, функция $\bar{s}(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ оказывается известной только для значений $\alpha = -(p_1 + k_1)$, $\beta_1 = -q$, $\beta_2 = k_1 + \frac{1}{2}q$.

Заменим теперь в (24.17) элемент объема $d^4 \alpha d^4 \beta_1 d^4 \beta_2$ так:

$$d^4 \alpha d^4 \beta_1 d^4 \beta_2 = d^4 p_1 d^4 k_1 d^4 q = \frac{\mu d\mu d^4 p_1}{E_N} \frac{m dm d^4 k_1}{E_\pi} dq_0 d^3 q. \quad (24.20)$$

Здесь E_N — энергия первичного нуклона в системе центра тяжести, E_π — энергия первичного мезона в той же системе координат. Подставляя теперь s из (24.19) в (24.17), мы не получим всю функцию $s(x, \xi_1, \xi_2)$, а только ее «видимую» часть Δs :

$$\Delta s(x, \xi_1, \xi_2) = \Delta\Omega \int \tilde{s} \left(-p_1 - k_1, -q, k_1 + \frac{1}{2} q \right) \times \\ \times \exp \left[-i(p_1 + k_1)x_1 - iq\xi_1 + i \left(k_1 + \frac{q}{2} \right) \xi_2 \right] d^3q, \quad (24.21)$$

где через $\Delta\Omega$ обозначены все множители в (24.20), кроме d^3q .

Рассмотрим частный случай, полагая $x=0$, $\xi_2=0$; тогда переменная ξ получает смысл расстояния между нуклоном и мезоном; при этом

$$\Delta s(0, \xi, 0) = \\ = \Delta\Omega \int s \left(-p_1 - k_1, -q, k_1 + \frac{1}{2} q \right) \exp(-iq\xi) d^3q. \quad (24.22)$$

Если теперь ограничиться областью, в которой $k_1 + \frac{1}{2}q \approx k_1$, т. е. случаем высокой энергии первичного мезона и малого передаваемого импульса q^2 , то в (24.20) можно пренебречь величиной q в выражении $\beta_2 = k_1 + \frac{1}{2}q$. Тогда (24.21) можно рассматривать как преобразование Фурье по переменной q ; обозначим

$$\tilde{s}(-p_1 - k_1, -q, k_1)_{q_0=0} = \tilde{s}(E, q^2), \quad (24.23)$$

где $E = E_N + E_\pi$ есть полная энергия системы.

Величина

$$\frac{\Delta s(0, \xi, 0)}{\Delta\Omega} = \int \tilde{s}(E, q^2) e^{iq\xi} d^3q \quad (24.24)$$

дает представление о пространственной структуре в нуклон-мезонном взаимодействии. Однако на основании (24.19) удобнее ввести величину

$$V(E, \xi) = \int \tilde{V}(E, q) e^{iq\xi} d^3q \quad (24.25)$$

(здесь

$$\tilde{V}(E, q) = \frac{\tilde{s}(E, q^2)}{E_\pi}, \quad (24.26)$$

которая является аналогом потенциала взаимодействия мезона с нуклоном. Действительно, в крайнем случае

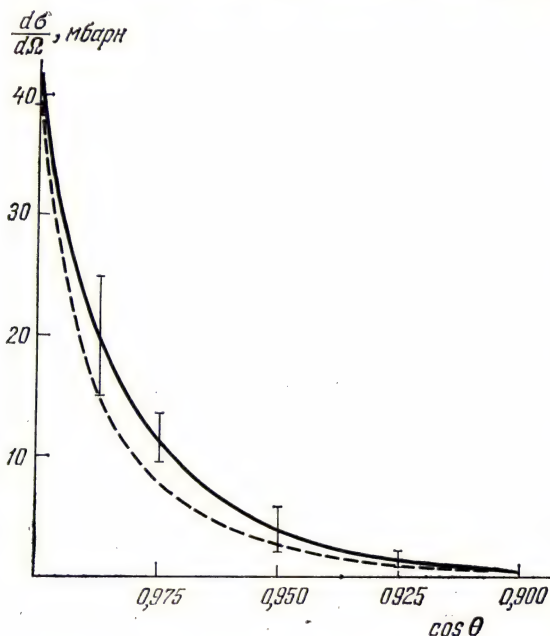


Рис. 23. Сравнение теоретических кривых для дифференциального сечения $d\sigma/d\Omega$ упругого рассеяния пионов на протоне как функция косинуса угла рассеяния θ . Сплошная линия получена исходя из эффективного потенциала (24.28), штриховая — из потенциала (24.28').

малого потенциала $V(E, \xi)$ амплитуда рассеяния выражалась бы формулой

$$T_{fi}(E, q) = \bar{u}_f(p_f) \bar{V}(E, q) u_i(p_i), \quad (24.27)$$

что согласуется с (24.19), если принять определение (24.26).

Величину $V(E, \xi)$ из (24.25) мы будем называть «эффективным» потенциалом мезон-нуклонного взаимодействия [50].

На рис. 23 приведены экспериментальные данные для дифференциального сечения упругого (π^+p) -рассеяния.

Считая амплитуду (π р)-рассеяния чисто мнимой (действительная часть этой амплитуды мала), построим две кривые, аппроксимирующие эти экспериментальные данные. Эти кривые соответствуют двум потенциалам (24.27):

$$V(E, \xi) = iV_0(E) \exp \left[-\frac{\xi^2}{a^2} \right], \quad (24.28)$$

$$V(E, \xi) = iV_0(E) \frac{\exp(-\xi/a)}{r/a}. \quad (24.28')$$

Из этих формул первая лучше согласуется с опытными данными, нежели вторая (см. рис. 23). Длина a в обоих случаях оказывается равной $a = 0,6 \div 0,7 \cdot 10^{-13}$. Такая длина соответствует обмену двумя π -мезонами или векторным ρ -мезоном.

Таким образом, «эффективный потенциал» $V(E, \xi)$ дает представление о структуре нуклона, согласующееся с представлением о мезонной атмосфере нуклона.

§ 25. Замечания о причинности в классической теории поля

Понятие упорядочения событий включает в себя важнейшую концепцию причинности, основанную на хроно-геометрическом делении многообразия событий на времени-подобное и пространственноподобное. Поэтому причинность можно рассматривать как геометрическую категорию и исследование вопросов причинности есть лишь один из возможных аспектов анализа геометрии.

Мы начнем анализ причинности в микромире с некоторых замечаний, относящихся к классической теории поля.

В классической теории линейного поля причинность наиболее непосредственно выражается с помощью функции Грина \mathfrak{G} , которая представляет собой поле, возникающее от неограниченно точно локализованного в пространстве и во времени импульсного источника поля $Q_0(x)$:

$$Q_0(x) = -\delta^4(x) \equiv -\delta(t) \delta^3(x). \quad (25.1)$$

Для скалярного поля функция Грина подчиняется неоднородному уравнению Клейна:

$$(\square^2 - m^2) \mathfrak{G} = -\delta(x). \quad (25.2)$$

Согласно дополнению I (см. (1.12) — (1.14)) получим для запаздывающей функции Грина $\mathfrak{G}_{\text{ret}}$

$$\mathfrak{G}_{\text{ret}}(x) = \begin{cases} D(x) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (25.3)$$

где функция $D(x)$ совпадает с перестановочной функцией, определенной формулой (I.3), и для опережающей $\mathfrak{G}_{\text{adv}}$

$$\mathfrak{G}_{\text{adv}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } t > 0, \\ -D(x) & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (25.3')$$

Особенно простые формулы получаются при $m=0$, что в терминах квантовой теории соответствует частицам, не имеющим массы покоя. В этом случае, как нетрудно получить из (I.3),

$$\mathfrak{G}_{\text{ret}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t-r)}{r} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases} \quad (25.4)$$

и

$$\mathfrak{G}_{\text{adv}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } t > 0. \\ -\frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t+r)}{r} & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (25.4')$$

Решение $\mathfrak{G}_{\text{ret}}(x)$ представляет собою бесконечно узкий импульс, расходящийся из точки $r=0$, решение $\mathfrak{G}_{\text{adv}}(x)$ соответствует такому же импульсу, сходящемуся в точку $r=0$ (см. рис. 24). Первое решение описывает импульс, передающий влияние события (импульса) в точке $r=0$ на удаленные от $r=0$ точки. Второе решение передает влияние событий (импульсов), расположенных вне точки $r=0$, на эту точку. При массе покоя частиц, отличной от нуля, вслед за этим сосредоточенным импульсом распространяется «хвост» более медленных влияний, который описывается членом с функцией $\frac{J_1(-im\sqrt{x^2})}{im\sqrt{x^2}}$ (см. (I.3)).

На языке корпускулярной теории существование этого хвоста можно интерпретировать как эффект частиц, движущихся со скоростями, меньшими скорости света c .

Оба решения, $\mathfrak{G}_{\text{ret}}(x)$ и $\mathfrak{G}_{\text{adv}}(x)$, обращаются в нуль вне светового конуса. Это означает, что взаимодействие из точки $x_1=0$ не может распространиться в удаленные от нее точки со скоростью, большей скорости света c . Равным образом оно не может прийти в точку $x_1=0$ из точек x_2 , удаленных от нее, со скоростью, превышающей скорость света c . На рис. 25 изображены три возможных случая влияния: а) точка x_2 лежит внутри светового ко-

нуса будущего по отношению к точке x_1 (условно обозначим $x_2 > x_1$); влияние x_1 на x_2 описывается функцией

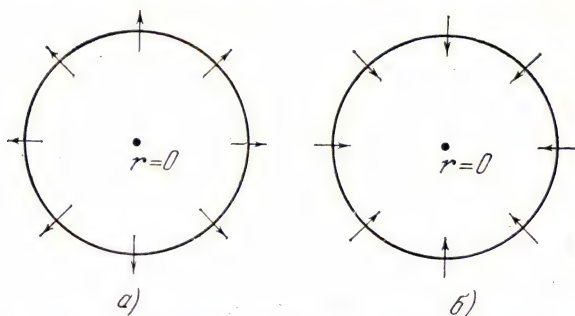


Рис. 24, а) Бесконечно узкий импульс, расходящийся из точки $r=0$; б) бесконечно узкий импульс, сходящийся к точке $r=0$.

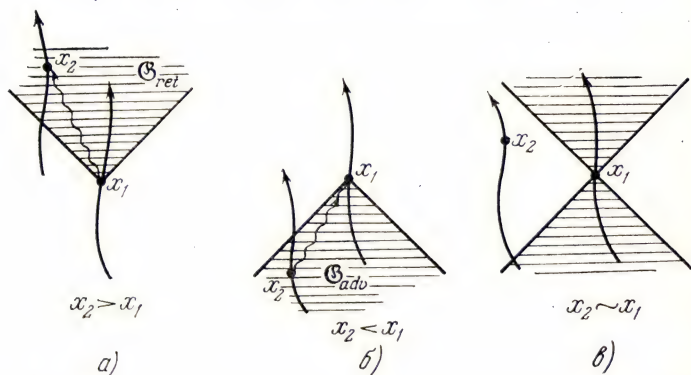


Рис. 25. Иллюстрация запаздывающего и опережающего взаимодействий. а) Запаздывающее взаимодействие между точками x_1 и x_2 . Функция Грина \mathcal{G}_{ret} отлична от нуля внутри заштрихованной области ($x_2 > x_1$); б) то же для опережающего взаимодействия. Функция Грина \mathcal{G}_{adv} отлична от нуля в заштрихованной на рисунке области ($x_2 < x_1$); в) точки x_2 и x_1 не могут быть связаны каким-либо взаимодействием.

$\mathcal{G}_{ret}(x)$, $x = x_2 - x_1 > 0$; б) точка x_2 лежит в конусе абсолютного прошедшего по отношению к точке x_1 (условно $x_2 < x_1$); влияние x_2 на x_1 в этом случае описывается функцией $\mathcal{G}_{adv}(x)$; в) когда x_2 и x_1 лежат по отношению

друг к другу в пространственно-подобной области, т. е. вне обоих световых конусов (условно обозначаем $x_2 \sim x_1$), обе функции Грина $\mathcal{G}_{\text{adv}}(x)$ и $\mathcal{G}_{\text{ret}}(x)$ обращаются в нуль, так что нет никакой физической связи между точками x_2 и x_1 .

С помощью функций Грина можно выразить поле $\varphi(x)$, обусловленное любым распределенным в пространстве и времени источником $Q(x)$. Дифференциальное уравнение для такого поля имеет вид

$$(\square^2 - m^2) \varphi(x) = -Q(x). \quad (25.5)$$

С другой стороны, запаздывающая функция Грина $\mathcal{G}_{\text{ret}}(x_2 - x_1)$ удовлетворяет уравнению

$$(\square_2^2 - m^2) \mathcal{G}_{\text{ret}}(x_2 - x_1) = -\delta(x_2 - x_1). \quad (25.6)$$

Умножая это уравнение на $Q(x_1)$ и интегрируя по d^4x_1 , получим

$$(\square_2^2 - m^2) \int \mathcal{G}_{\text{ret}}(x_2 - x_1) Q(x_1) d^4x_1 = -Q(x_2). \quad (25.7)$$

Сопоставление с (25.5) показывает, что поле φ в точке x_2 будет равно

$$\varphi(x_2) = \varphi_0(x_2) + \int \mathcal{G}_{\text{ret}}(x_2 - x_1) Q(x_1) d^4x_1, \quad (25.8)$$

где $\varphi_0(x_2)$ есть решение однородного уравнения (уравнение (25.5) при $Q=0$).

Если поле порождается только источником $Q(x_1)$, то $\varphi_0(x_2) \equiv 0$ и вместо (25.8) получается

$$\varphi(x_2) = \int \mathcal{G}_{\text{ret}}(x_2 - x_1) Q(x_1) d^4x_1. \quad (25.9)$$

В простейшем случае, при $m=0$, на основании (25.4) найдем

$$\varphi(x_2) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\delta(t_2 - t_1 - r)}{r} Q(x_1) d^4x_1 \quad (25.10)$$

(здесь $r = |x_2 - x_1|$) или

$$\varphi(x_2) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{Q(t - r, \mathbf{x}_1)}{r} d^3x_1. \quad (25.11)$$

Отсюда видно, что поле $\varphi(x_2)$ в точке $x_2(t_2, \mathbf{x}_2)$ складывается из запаздывающих воздействий, отправляющихся из точек \mathbf{x}_1 в момент времени $t_1 = t_2 - r/c$ ($c=1$). Это

и есть наиболее прозрачное выражение причинности в классической теории поля.

При $m \neq 0$ согласно (1.3) и (25.3) будем иметь несколько более сложное выражение для поля $\varphi(x_2)$, именно:

$$\varphi(x_2) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{Q(t_2 - r, \mathbf{x}_1)}{r} d^3x_1 + \\ + \frac{m}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{J_1(m \sqrt{(t_2 - t_1)^2 - r^2})}{\sqrt{(t_2 - t_1)^2 - r^2}} Q(t, \mathbf{x}) dt d^3x_1. \quad (25.12)$$

При этом область интегрирования Ω в последнем интеграле в соответствии с (25.3) ограничена условиями $(t_2 - t_1)^2 > r^2$, $t_2 - t_1 > 0$. Отношение $v = r/|t_2 - t_1| < 1 \equiv c$ можно рассматривать как скорость распространения взаимодействий, происходящих за счет «частиц», имеющих скорость v , меньшую скорости света.

Допустим теперь, что в области около x_2 распределен заряд $Q_2(x_2)$. Определим величину

$$W = \int Q_2(x_2) \varphi(x_2) d^4x_2 \quad (25.13)$$

как *плотность действия* (интеграл по времени от энергии взаимодействия). Обозначая теперь источник поля в области x_1 через $Q_1(x_1)$, получим, что

$$W = \int Q_2(x_2) \mathfrak{G}(x_2 - x_1) Q_1(x_1) d^4x_2 d^4x_1, \quad (25.14)$$

где $\mathfrak{G}(x_2 - x_1) = \mathfrak{G}_{\text{ret}}(x_2 - x_1) - \mathfrak{G}_{\text{adv}}(x_2 - x_1)$.

Такая запись симметричным образом учитывает действие одного заряда на другой и, в силу (25.3) и (25.3'), обеспечивает запаздывающее действие заряда, расположенного «раньше», на заряд, расположенный «позднее».

Возьмем теперь вторую функциональную производную от действия W по функциям источников Q_2 и Q_1 в точках x_2 и x_1 соответственно. Получаем

$$\frac{\delta^2 W}{\delta Q_2(x_2) \delta Q_1(x_1)} = \mathfrak{G}(x_2 - x_1). \quad (25.15)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\delta^2 W}{\delta Q_2(x_2) \delta Q_1(x_1)} = 0, \quad (25.16)$$

если $x_2 \sim x_1$, т. е. если точки x_2 и x_1 лежат по отношению друг к другу вне светового конуса, так что интер-

вал $(x_2 - x_1)^2$ является пространственно-подобным. Условие (25.16) выражает тот физический факт, что влияние одного заряда на другой не может распространяться со скоростью, большей скорости света.

В заключение этого раздела заметим, что функции Грина, удобные для описания причинности, сами по себе являются лишь математическими абстракциями, так как импульсный источник

$$Q(x) = g\delta(t)\delta^3(x), \quad (25.17)$$

порождающий поле, описываемое функцией Грина, несовместим с *представлением о сохранении заряда*. Закон сохранения заряда требует, чтобы выполнялось уравнение непрерывности

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (25.18)$$

где \mathbf{j} — плотность тока, соответствующего заряду Q . Из этого уравнения следует, что в случае импульсного источника $(g\delta(t)\delta^3(x))$ плотность тока $\mathbf{j}(x)$ должна иметь вид

$$\mathbf{j}(x) = -g \frac{d\delta(t)}{dt} \nabla \left(\frac{1}{r} \right), \quad (25.19)$$

так как

$$\operatorname{div} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \delta^3(x).$$

Таким образом, ток, соответствующий импульсному источнику Q (см. (25.17)), оказывается распределенным в пространстве и имеет высокую сингулярность по времени (производная δ -функции).

Более реальным представляется случай точечного источника, движущегося по некоторой траектории

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t). \quad (25.20)$$

Плотность заряда и тока имеют в этом случае вид

$$Q(x) = g\delta^3[\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)], \quad (25.21)$$

$$\mathbf{j}(x) = g \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} \delta^3[\mathbf{x} - \mathbf{X}(t)]. \quad (25.21')$$

Эти величины, как легко проверить, удовлетворяют уравнению непрерывности (25.18). Подставляя эти выраже-

ния для $Q(x)$ и $\mathbf{j}(x)$ в формулу (25.9), мы найдем скалярный и векторный потенциалы:

$$\varphi(x) = \frac{g}{r \left[x - X \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]}, \quad (25.22)$$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{g \frac{d\mathbf{X} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{dt}}{r \left[x - X \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]}, \quad (25.22')$$

где точки t, x , достигаемые «сигналом» от движущегося точечного заряда, лежат на поверхности

$$R^2 = \left[x - X \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]^2. \quad (25.23)$$

Рис. 26 иллюстрирует передачу сигнала от одной частицы (x_1) к другой (x_2) посредством запаздывающей функции Грина $\mathcal{G}_{\text{ret}}(x_2 - x_1)$.

Рассмотрим теперь потенциалы $\varphi(x)$ и $\mathbf{A}(x)$ вдали от точки $\mathbf{X} \left(t - \frac{r}{c} \right)$. Для определенности можно принять, что движение заряда происходит в ограниченной области $|x| < M$. Тогда

$$\varphi(x) = \frac{g}{r(x)} + \frac{g x \mathbf{X} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^3} + \dots, \quad (25.24)$$

$$\mathbf{A}(x) = \frac{g \dot{\mathbf{X}} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r(x)}. \quad (25.24')$$

В этой области пространства $\mathfrak{R}_4(x)$ потенциал $\varphi(x)$ не имеет значения для причинности, так как первый член $g/r(x)$ статический, и поэтому с ним не связана передача какого-либо сигнала; второй член имеет порядок $O(1/r^3)$. Таким образом, только векторная часть потенциала $\mathbf{A}(x)$ осуществит передачу сигнала.

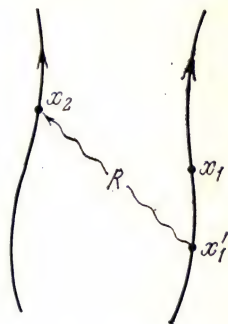


Рис. 26. Запаздывающее взаимодействие между двумя «точечными» частицами; $x_2 = X_2(t)$ и $x_1 = X_1(t)$ — положения этих частиц в момент времени $t_2 = t_1 = t$, $x'_1 = X_1 \left(t - \frac{R}{c} \right)$ — эффективное положение частицы 1. Здесь R — расстояние между точками x'_1 и x_2 .

Предположим, далее, что ток $j = g\dot{X}\delta^3(x-X)$ создается осциллятором, которому сообщено движение силой $F(t)$:

$$\ddot{X} + \gamma\dot{X} + \omega^2 X = \frac{1}{m} F(t), \quad (25.25)$$

где ω — собственная частота осциллятора, m — его масса, γ — коэффициент трения. Самое резкое движение осциллятора, какое можно себе представить, возникает под действием мгновенного удара, т. е. в случае, когда

$$F(t) = A\delta(t). \quad (25.26)$$

Принимая во внимание, что

$$X(t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^t \mathfrak{G}(t-\tau) F(\tau) d\tau, \quad (25.27)$$

где $\mathfrak{G}(t)$ — функция Грина уравнения (25.25):

$$\mathfrak{G}(t) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)}{\sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}} \left(\exp\left(t\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2}\right) - \right. \\ \quad \left. - \exp\left(-t\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2}\right) \right), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (25.28)$$

найдем из (25.26) и (25.27)

$$X(t) = \frac{A}{m} \mathfrak{G}(t). \quad (25.29)$$

Если $\omega \gg \gamma/2$ — малое трение, то

$$\dot{X}(t) = \frac{A}{m} e^{-\gamma/2 t} \cos \omega t; \quad (25.30)$$

в случае большого трения

$$\dot{X}(t) = \frac{A}{m} e^{-\gamma t}. \quad (25.31)$$

В первом случае максимум тока достигается при $t \sim 2/\gamma$ и ток длится примерно такое же время; во втором случае максимум тока имеет место при $t=0$ и длится также в течение времени порядка $t \approx 2/\gamma$. Ширина импульса Δt в обоих случаях определяется величиной $\gamma/2$.

Таким образом, предельно короткий импульс будет передаваться осциллятором, обладающим предельно большим трением. Этот элементарный расчет иллюстрирует способ, которым на практике мог бы быть осуществлен источник, порождающий короткий сигнал.

В классической (макроскопической) физике не ставится никаких принципиальных ограничений относительно размеров области, в которой локализован источник, относительно частоты его колебаний и его коэффициента трения. В частности, заряд может быть сосредоточен в сколь угодно малой области пространства (что и выражается в приведенном расчете функцией $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t))$) и иметь сколь угодно малую амплитуду колебаний A при любой частоте ω и любом коэффициенте трения γ — ситуация, типичная для последовательной теории, сама по себе она не ставит каких-либо ограничений.

Ограничения приходят извне. Уменьшая размеры источника, мы в конце концов придем к источникам, имеющим молекулярные размеры, и тем самым перейдем в область *микромира*, где произвол в выборе источника в отношении его массы, частоты, трения и амплитуды колебаний существенно сокращается. При этом принципиальное значение приобретает соотношение неопределенностей Гейзенберга, которое связывает пространственно-временную локализацию источника с неопределенностью в его энергии ΔE и импульсе Δp .

§ 26. Причинность в квантовой теории поля

В квантовой теории поля распространение взаимодействия из одной области $\mathfrak{R}(x_1)$ в другую $\mathfrak{R}(x_2)$ описывается с помощью квантованных полей. Операторы, представляющие эти поля, подчиняются правилам коммутации (см. (14.3) и (16.2)):

для скалярного комплексного поля $\hat{\phi}(x)$

$$[\hat{\phi}(x_2), \hat{\phi}^+(x_1)] = iD(x_2 - x_1), \quad (26.1)$$

для скалярного действительного поля $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^+(x)$

$$[\hat{\phi}(x_2), \hat{\phi}(x_1)] = iD(x_2 - x_1), \quad (26.2)$$

для векторного поля $\hat{A}_\mu(x)$

$$[\hat{A}_\mu(x_2), \hat{A}_\nu(x_1)] = iD(x_2 - x_1) \delta_{\mu\nu} \quad (26.3)$$

и для спинорного поля $\hat{\psi}_\alpha(x)$

$$\{\hat{\psi}_\alpha(x_2), \bar{\hat{\psi}}_\beta(x_1)\} = iS_{\alpha\beta}(x_2 - x_1). \quad (26.4)$$

Остальные коммутаторы равны нулю.

Функции $D(x_2 - x_1)$ и $S_{\alpha\beta}(x_2 - x_1)$ описывают корреляцию полей в различных точках пространства — времени. Важнейшей особенностью этих функций является то, что они исчезают для пространственноподобных интервалов, т. е. для $(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 < 0$. Поэтому корреляция между значениями полей, разделенных пространственноподобным интервалом $x_2 \sim x_1$, отсутствует*). Это можно толковать как отсутствие какой-либо причинной связи между значениями полей, взятых в областях $\mathfrak{R}(x_2)$ и $\mathfrak{R}(x_1)$, расположенных пространственноподобно друг другу так, что для всех точек $x_2 \in \mathfrak{R}(x_2)$ и $x_1 \in \mathfrak{R}(x_1)$ будет $x_2 \sim x_1$.

В этой связи условия коммутации**) (26.1) — (26.4), которые обычно называют *условиями локальной коммутативности*, можно также рассматривать как *условия микропричинности* в квантовой теории поля. Заметим, что другие формулировки микропричинности, которые будут описаны позднее, так или иначе подразумевают соблюдение условий локальной коммутативности вида (26.1) — (26.4).

Операторы квантовых полей могут быть разложены на две части: одну, содержащую операторы рождения частиц (ее называют положительно-частотной частью), и другую, содержащую операторы уничтожения (это отрицательно-частотная часть). Чтобы не загромождать дальнейшие выкладки лишними обозначениями и индексами, мы обратимся к случаю действительного скалярного поля $\hat{\phi}(x)$.

*) В случае спинорного поля обращается в нуль не коммутатор $[A, B]$, а антикоммутатор $\{A, B\}$. Однако, пользуясь (26.4), нетрудно показать, что для физически наблюдаемых билинейных комбинаций вида $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ (где Γ — некоторая спинорная матрица), взятых в двух точках x_1 и x_2 , будет исчезать их коммутатор.

**) Мы не будем касаться здесь аксиоматических исследований, которые допускают несколько ослабленные условия — коммутативность в среднем по вакууму.

Разложение этого поля на положительно-частотную часть $\hat{\varphi}^+(x)$ и отрицательно-частотную $\hat{\varphi}^-(x)$ имеет вид

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}^+(x) + \hat{\varphi}^-(x), \quad (26.5)$$

причем

$$\hat{\varphi}^+(x) = \int \frac{\hat{a}^+(\mathbf{k}) e^{i(\omega t - \mathbf{k}x)}}{\sqrt{2\omega}} d^3k, \quad (26.6)$$

$$\hat{\varphi}^-(x) = \int \frac{\hat{a}(\mathbf{k}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k}x)}}{\sqrt{2\omega}} d^3k, \quad (26.6')$$

где $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$. Из (26.6) и (26.6') видно, что $\hat{\varphi}^+(x)$ содержит только операторы рождения $\hat{a}^+(\mathbf{k})$, а $\hat{\varphi}^-(x)$ — только операторы уничтожения $\hat{a}(\mathbf{k})$ *). Поэтому оператор $\hat{\varphi}^+(x_1)$ есть оператор рождения частицы в точке x_1 , а оператор $\hat{\varphi}^-(x_2)$ есть оператор поглощения частицы в точке x_2 . Оператор $\hat{\varphi}^-(x_2)\hat{\varphi}^+(x_1)$ будет оператором распространения частицы из точки x_1 , где она рождается, до точки x_2 , где она поглощается. При этом $t_2 > t_1$. Оператор $\hat{\varphi}^-(x_1)\hat{\varphi}^+(x_2)$ при $t_1 > t_2$ описывает рождение частицы в точке x_2 и ее поглощение в точке x_1 .

Матричные элементы этих операторов и являются функциями влияния в квантовой теории поля. При этом единственными отличными от нуля элементами являются вакуумные средние, т. е.

$$\langle \Psi_0 | \hat{\varphi}^-(x_2) \hat{\varphi}^+(x_1) | \Psi_0 \rangle \text{ при } t_2 > t_1, \quad (26.7)$$

$$\langle \Psi_0 | \hat{\varphi}^-(x_1) \hat{\varphi}^+(x_2) | \Psi_0 \rangle \text{ при } t_2 < t_1. \quad (26.7')$$

Здесь Ψ_0 — функционал поля, описывающий состояние вакуума. Оба выражения можно объединить в одно, если воспользоваться понятием хронологически упорядоченного произведения, « T -произведения», двух операторов. По определению T -произведение поля $\hat{\varphi}(x_1)$, взятого в точке x_1 , на поле $\hat{\varphi}(x_2)$, взятое в точке x_2 , равно

$$T \hat{\varphi}(x_2) \hat{\varphi}(x_1) = \begin{cases} \hat{\varphi}(x_2) \hat{\varphi}(x_1), & \text{если } t_2 > t_1, \\ \hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2), & \text{если } t_2 < t_1. \end{cases} \quad (26.8)$$

*) Подобные разложения возможны и для любого квантованного поля $\hat{\varphi}$, \hat{A}_μ и т. п.

Заметим, что T -произведение релятивистски инвариантно. Действительно, для времениподобного интервала $x_2 \geq x_1$ неравенства $t_1 \geq t_2$ инвариантны относительно преобразования Лоренца. Для пространственно-подобного интервала $x_2 \sim x_1$ операторы $\hat{\phi}(x_1)$ и $\hat{\phi}(x_2)$, согласно (26.2), коммутируют, и поэтому их порядок в (26.8) несуществен. Замечая, что $\hat{\phi}^-(x) \Psi_0(0) = 0$ («устойчивость вакуума»), нетрудно видеть, что оба выражения (26.7) и (26.7') объединяются формулой

$$\langle \Psi_0 | T \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_1) | \Psi_0 \rangle = i D_c(x_2 - x_1), \quad (26.9)$$

где $D_c(x)$ есть *причинная функция*, определенная в дополнении I (см. I.5). Физический смысл равенства (26.9) заключается в том, что левая его часть есть среднее по всем процессам, когда в одной точке частица излучается, а в другой точке — поглощается.

Функция $D_c(x)$ имеет вид (см. (1.5))

$$\begin{aligned} D_c(x) = & \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) - \theta(x^2) \frac{m}{8\pi \sqrt{x^2}} [I_1(m \sqrt{x^2}) - i N_1(m \sqrt{x^2})] + \\ & + \theta(-x^2) \frac{im}{4\pi^2 \sqrt{-x^2}} K_1(m \sqrt{-x^2}). \end{aligned} \quad (26.10)$$

Эта функция симметричным образом учитывает запаздывающее и опережающее взаимодействия подобно классической функции Грина $\mathcal{G}(x)$ в (25.14). Ее существенное отличие от классических функций влияния заключается в том, что она не равна нулю и вне светового конуса. Действительно, при $x^2 = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 < 0$ из (26.10) следует

$$D_c(x) = \frac{im}{4\pi \sqrt{-x^2}} K_1(m \sqrt{-x^2}). \quad (26.10')$$

Заметим, что при $m \sqrt{-x^2} \gg 1$ это выражение приобретает вид

$$D_c(x) = \frac{im}{4\pi \sqrt{-x^2}} \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{m \sqrt{-x^2}} \right)^{1/2} e^{-m \sqrt{-x^2}}, \quad (26.10'')$$

т. е. вне светового конуса функция $D_c(x)$ экспоненциально затухает на протяжении комптоновской длины волны частицы \hbar/mc (в формулах (26.10), (26.10'), (26.10'') принято $\hbar = 1$, $c = 1$).

При $m=0$ имеем вне светового конуса

$$D_c(x) = \frac{i}{4\pi x^2}, \quad (26.11)$$

т. е. убывание $D_c(x)$ вне светового конуса более медленно, нежели при $m \neq 0$ (см. дополнение I, формулы (I.6) и (I.8)).

На первый взгляд может сложиться впечатление, что это свойство функции $D_c(x)$ противоречит причинности, поскольку позволяет распространяться взаимодействию и вне светового конуса. Мы покажем теперь, что из-за соотношения неопределенностей Гейзенберга такого противоречия в действительности не возникает. Для доказательства этого важного положения рассмотрим две микросистемы (частицы или системы частиц) A и B , отдаленные друг от друга в пространстве *).

Пусть в системе A происходит событие a , а в системе B — событие b , причем событие a предшествует событию b , так что $x_a < x_b$. Здесь x_a — координата события a , а x_b — координата события b . Предполагается, что события a и b могут быть распределенными в пространственно-временных областях \mathfrak{R}_a и \mathfrak{R}_b , тогда x_a, x_b — точки из этих областей (все или их часть).

Мы будем считать b следствием события a (причины), если система A , как результат события a , посылает в систему B «сигнал», инициирующий в B событие b . Тем самым предполагается, что в процессе каузального взаимодействия энергия E_A системы A уменьшается (потеря энергии на отправленный «сигнал»), а энергия E_B системы B увеличивается (прием «сигнала»); соответственно должны изменяться и импульсы этих систем. Иными словами, «сигнал» несет положительную энергию $\varepsilon = \hbar\omega$ и соответствующий импульс $p = \hbar k$. Эти утверждения имеют смысл только в том случае, когда разброс энергии ΔE и импульса $\Delta p \approx \Delta E/v$ (v — скорость системы) в рассматриваемых системах A и B мал по сравнению с энергией кванта и с его импульсом соответственно:

$$\Delta E_A \ll \hbar\omega, \quad \Delta E_B \ll \hbar\omega, \quad (26.12)$$

$$\Delta p_A \approx \frac{\hbar}{L} \ll \frac{\hbar\omega}{c}, \quad \Delta p_B \approx \frac{\hbar}{L} \ll \frac{\hbar\omega}{c}. \quad (26.12')$$

* В противном случае мы должны рассматривать $A+B$ как одну неразложимую на части систему C .

Здесь L — размеры области, в которой локализованы микросистемы A и B (мы считаем эти размеры одинаковыми). В случае невыполнения этих неравенств нельзя определить, какая из систем, A или B , излучает сигнал и какая его поглощает.

Мы видим, что координация событий в терминах причины — следствия требует одновременно и *пространственно-временной локализации микросистем, и достаточной определенности их энергии E и импульса p* . Это обстоятельство имеет фундаментальное значение для проблемы причинности в микромире: мы можем изучать причинную связь только между волновыми пакетами, которые по самой своей сути являются размазанными, нечетко определенными объектами в пространстве — времени. Поэтому причинная связь и причинная последовательность явлений в микромире могут быть установлены лишь в пределах определенного «допуска», величина которого определяется пространственным размером волнового пакета $\Delta x = L$. Этой неопределенности в пространственных размерах будет соответствовать временная неопределенность $\Delta t \geq \Delta x/c$.

Эти соображения будут иметь важнейшее значение для определения понятия макроскопической причинности в теории элементарных частиц (см. гл. VI).

Теперь же мы обратимся к иллюстрации этих общих соображений простым примером.

Рассмотрим два волновых пакета (см. рис. 27, а). Первый из этих пакетов распределен внутри пространственно-временной области $\mathfrak{R}(x_1)$ и имеет пространственную протяженность $\Delta x \approx L$ и временную длительность $\Delta t \approx T$. Мы будем считать, что этот волновой пакет имеет энергию E_1 с точностью $\Delta E \approx \hbar/T$ и импульс P_1 с точностью $\Delta P_1 \approx \hbar/L$ (предполагается, что $E_1 \gg \Delta E_1$, $P_1 \gg \Delta P_1$). В пространственно-временной области $\mathfrak{R}(x_2)$ сосредоточен другой пакет, который можно считать имеющим ту же протяженность L (и длительность T), энергию $E_2 \gg \Delta E_2 \approx \hbar/T$ и импульс $P_2 \gg \Delta P_2 \approx \hbar/L$.

Заряд первого пакета $Q(x_1)$, порождающий поле $\varphi(x_2)$, можно представить в форме

$$Q(x_1) = g\left(\frac{t_1}{T}\right) \rho\left(\frac{x_1}{L}\right) e^{i\omega t_1}, \quad (26.13)$$

где пространственная часть — функция $\rho(\mathbf{x}_1)$ существенно отлична от нуля в области $\mathfrak{R}_3(\mathbf{x}_1) \approx L^3$, около точки \mathbf{x}_1 ; ω есть характерная частота квантового перехода, происходящего в волновом пакете. Функция $g(t_1/T)$ существенно отлична от нуля лишь в области $\mathfrak{R}_1(t_1) \approx T$, $\mathfrak{R}(\mathbf{x}_1) =$

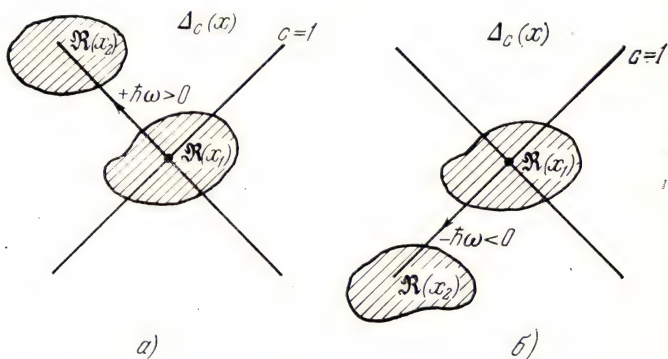


Рис. 27. а) Пакет в области $\mathfrak{R}(\mathbf{x}_2)$ расположен позднее пакета, находящегося в области $\mathfrak{R}(\mathbf{x}_1)$ [$\mathfrak{R}(\mathbf{x}_2) > \mathfrak{R}(\mathbf{x}_1)$]. Взаимодействие пакетов обуславливается излучением пакетом $\mathfrak{R}(\mathbf{x}_1)$ кванта энергии $\hbar\omega (> 0)$, который поглощается пакетом, находящимся в области $\mathfrak{R}(\mathbf{x}_2)$. б) Пакет $\mathfrak{R}(\mathbf{x}_2)$ расположен ранее пакета, находящегося в $\mathfrak{R}(\mathbf{x}_1)$ [$\mathfrak{R}(\mathbf{x}_2) < \mathfrak{R}(\mathbf{x}_1)$]. В этом случае взаимодействие обуславливается испусканием пакетом $\mathfrak{R}(\mathbf{x}_1)$ отрицательного кванта ($\hbar\omega < 0$) и поглощением его пакетом в $\mathfrak{R}(\mathbf{x}_2)$. Этот процесс эквивалентен излучению кванта $\hbar\omega > 0$ пакетом в $\mathfrak{R}(\mathbf{x}_2)$ и поглощению его пакетом, расположенным в $\mathfrak{R}(\mathbf{x}_1)$.

$= \mathfrak{R}_3(\mathbf{x}_1) \times \mathfrak{R}_1(t_1)$. Ее можно рассматривать как величину заряда волнового пакета, который адиабатически, т. е. в течение времени $T \gg 1/\omega$, включается и выключается около момента времени $t_1 = 0$. Можно, например, положить, что

$$g\left(\frac{t_1}{T}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{T}{t_1^2 + T^2}, \quad \rho\left(\frac{\mathbf{x}_1}{L}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{L}{\mathbf{x}_1^2 + L^2}. \quad (26.14)$$

Этот процесс адиабатического включения и выключения заряда противоречит закону сохранения заряда и поэтому имеет чисто формальное значение. Мы прибегаем к этому искусственному приему лишь для того, чтобы выделить эффект, порожденный источником поля не только

от области пространства $\mathfrak{R}_3(x_1) \approx L^3$, но и за определенное время $\approx T$.

Более близким к действительности было бы рассмотрение волнового пакета, движущегося по некоторой траектории. Тогда «включение» и «выключение» области $\mathfrak{R}_3(x_1)$ происходило бы само собой за время $T \approx L/v$, где v — скорость пакета. Адиабатичность такого «автоматического включения» и «выключения» области $\mathfrak{R}_3(x_1)$ будет соблюдена, если

$$T \approx \frac{L}{v} \gg \frac{1}{\omega} \quad [(26.15)]$$

или

$$L \gg \frac{v}{c} \lambda, \quad (26.15')$$

где λ есть длина волны кванта, излучаемого или поглощаемого волновым пакетом.

Рассмотрим теперь квантовый аналог действия W (25.14). Согласно определению причинной функции (26.9) именно она играет в квантовой теории роль той функции Грина, которая связывает события в одной области пространства — времени с событиями в другой. Поэтому

$$W = i \int Q(x_2) D_c(x_2 - x_1) Q(x_1) d^4x_2 d^4x_1. \quad (26.16)$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\delta^2 W}{\delta Q(x_2) \delta Q(x_1)} = D_c(x_2 - x_1) \quad (26.17)$$

и что, в отличие от (25.14), эта величина не исчезает вне светового конуса.

Для выяснения свойств величины W удобнее вычислить поле $\varphi(x_2)$, создаваемое пакетом $Q(x_1)$ в области $\mathfrak{R}(x_2)$:

$$\varphi(x_2) = \int D_c(x_2 - x_1) Q(x_1) d^4x_1^*. \quad (26.18)$$

Наиболее слабое затухание функции $D_c(x)$ вне светового конуса имеет место при $m=0$, т. е. для поля, не имеющего частиц с массой покоя, отличной от нуля.

*) В силу свойств симметрии функции $D_c(x_2 - x_1)$ можно было бы так же вычислять поле $\varphi(x_1)$, создаваемое зарядом $Q(x_2)$ в $\mathfrak{R}(x_1)$; результат вычисления симметричен относительно областей $\mathfrak{R}(x_1)$ и $\mathfrak{R}(x_2)$.

Функция $D_c(x_2 - x_1)$ описывает процесс взаимодействия посредством сигнала с положительной энергией, симметричного относительно обеих пространственно-временных областей $\mathcal{H}(x_1)$ и $\mathcal{H}(x_2)$. Рис. 27 иллюстрирует сказанное. Что же касается «аномального» поведения причинной функции $D_c(x_2 - x_1)$ вне светового конуса, то соотношение неопределенностей не позволяет «уличить» частицу в *нарушении* каких-либо законов причинности [52, 53].

§ 27. Распространение сигнала «внутри» микрочастицы

В предыдущем параграфе было показано, что, хотя причинная функция $D_c(x)$, определяющая распространение взаимодействия в квантовой теории поля, и не исчезает вне светового конуса, тем не менее невозможно обнаружить распространение сигнала со скоростью, большей скорости света, в частности с бесконечно большой скоростью.

Этот «парадокс» D_c -функции был рассмотрен для случая взаимодействия двух точечных частиц.

Сходный парадокс возникает для микрочастицы, имеющей конечные размеры. Суть дела заключается в том, что форм-фактор частицы $F(q)$ (§ 22), где q — импульс, передаваемый при взаимодействии, не исчезает для пространственноподобных значений q и, следовательно, частице можно приписать жесткое пространственное распределение зарядов и токов

$$\rho(x) = \int F(q) e^{iqx} d^3q, \quad (27.1)$$

способное передать сигнал с бесконечно большой скоростью. Для разъяснения возникающей ситуации достаточно ограничиться рассмотрением взаимодействия виртуального фотона со спинорной частицей.

Поле фотона k будем описывать вектор-потенциалом $A_\mu(x)$, а спинорное поле частицы, имеющей массу, — оператором $\hat{\psi}(x)$. Оператор взаимодействия в первом приближении по заряду e может быть написан в виде

$$\hat{W} = \int \hat{J}_\mu(x_3, x_2, x_1) A_\mu(x_2) d^4x_3 d^4x_2 d^4x_1, \quad (27.2)$$

где $\hat{J}_\mu(x_3, x_2, x_1)$ — плотность тока, создаваемого спинорной частицей (см. диаграмму на рис. 28). Амплитуда вероятности перехода частицы из состояния i в состояние f , вызванного этим взаимодействием, будет равна

$$T_{fi} = \frac{i}{\hbar} \langle f | \hat{W} | i \rangle = \frac{i}{\hbar} \int \langle f | J_\mu(x_2) | i \rangle A_\mu(x_2) d^4x_2, \quad (27.3)$$

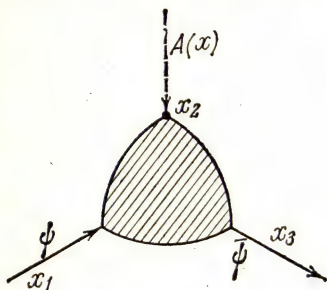


Рис. 28. Графическое изображение тока $J_\mu(x_3, x_2, x_1)$ для спинорной частицы, имеющей конечные размеры; x_1 — вход частицы, x_3 — выход; в точке x_2 происходит взаимодействие с внешним полем $A(x)$.

где $\langle f | J_\mu(x_2) | i \rangle$ есть матричный элемент плотности тока $J_\mu(x_3, x_2, x_1)$, отнесенный к переходу $i \rightarrow f$:

$$\langle f | J_\mu(x_2) | i \rangle = \int \bar{\psi}_f(x_3) \hat{J}_\mu(x_3, x_2, x_1) \psi_i(x_1) \times d^3x_3 d^3x_1. \quad (27.4)$$

Мы будем считать волновые функции $\bar{\psi}_f$ и ψ_i произвольными, с тем лишь ограничением, что они являются суперпозициями состояний только с положительной энергией:

$$\bar{\psi}_f(x_3) = \int c_f^*(p_3) \bar{u}_f(p_3) \exp(-ip_3x_3) d^3p_3, \quad (27.5)$$

$$\psi_i(x_1) = \int c_i(p_1) u_i(p_1) \exp(ip_1x_1) d^3p_1; \quad (27.5')$$

здесь \bar{u}_f, u_i — биспиноры Дирака, c_f^*, c_i — амплитуды состояний с импульсами p_3, p_1 ; $p_3^0, p_1^0 > 0$. Обозначая $p_3 = p_1 = q$ и пользуясь соотношением

$$\langle p_3 | \hat{J}_\mu(x_2) | p_1 \rangle = \int \exp(-ip_3x_3) \hat{J}_\mu(x_3, x_2, x_1) \exp \times \times (-ip_1x_1) d^4x_3 d^4x_1 = \hat{J}_\mu(q) \exp(iqx_2), \quad (27.6)$$

получим из (27.4), (27.5) и (27.5')

$$\langle f | \hat{J}_\mu(x_2) | i \rangle = \int c_f^*(p_3) c_i(p_1) \bar{u}_f(p_3) \hat{J}_\mu(q) u_i(p_1) \times \times \exp(iqx_2) d^3p_3 d^3p_1, \quad (27.7)$$

где $\hat{J}_\mu(q)$ — оператор тока в импульсном представлении. Этот оператор согласно (22.15) может быть записан в виде

$$\hat{J}_\mu(q) = eF_1(q^2)\gamma_\mu + i\mu\sigma_{\mu\nu}q_\nu F_2(q^2), \quad (27.8)$$

где e — заряд частицы, μ — ее магнитный момент, $F_1(q^2)$, $F_2(q^2)$ — электрический и магнитный форм-факторы частицы. Величины F_1 и F_2 при таком определении безразмерны и должны зависеть лишь от отношения q^2/q_m^2 , где q_m — некоторое значение q , определяющее скорость убывания F_1 и F_2 при $|q| \rightarrow \infty$. Размер частицы R связан с q_m соотношением $R = \hbar/q_m$.

Для того чтобы рассмотреть распространение сигнала внутри частицы, мы будем считать состояния ψ_f и ψ_i локализованными волновыми пакетами. Фотонное поле A_μ будем считать также локализованным *). Для определенности мы положим

$$c_f(p) = \frac{b_f^{3/2}}{\pi^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} b_f^2 (p - p_f)^2 - i p x_f \right\}, \quad (27.9)$$

$$c_i(p) = \frac{b_i^{3/2}}{\pi^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} b_i^2 (p - p_i)^2 - i p x_i \right\}, \quad (27.9')$$

$$A_\mu(x) = a_\mu \exp \{ -i [k(x - X) - k_0(t - T)] \} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2a^2} [x - X]^2 - \frac{1}{2a^2} [x - (X - uT)]^2 \right\}. \quad (27.9'')$$

Волновые функции (27.5) и (27.5') представляют собой волновые пакеты со средними импульсами p_f и p_i , локализованные при $t=0$ около $x = x_f$, x_i , при средних квадратичных отклонениях

$$\Delta(\overline{p - p_f})^2 = \frac{\hbar^2}{b_f^2}, \quad \Delta(\overline{x - x_f})^2 > \alpha b_f^2 + \beta \frac{\hbar}{mc} b_f, \quad (27.10)$$

где коэффициенты α и $\beta \approx 1$, m — масса частицы (ср. § 15). Те же соотношения относятся и к пакету (27.9').

Поле $A_\mu(x)$ представляет собою волновой пакет виртуальных фотонов с характерным волновым вектором $k(k, k_0)$ и «скоростью» распространения u , локализованный при $T=0$ около $x=X$, в области шириной порядка $\Delta x \approx a$, $\Delta t \approx a/c$. Такой выбор формы пакета виртуальных

*) См. дополнение VIII, формула (VIII.4).

фотонов соответствует предположению, что он мог бы быть излучен реальной физической частицей.

Заметим, что если бы было возможно использовать бесконечно узкие пакеты в пространстве и во времени δ -образного типа $\psi_f(x_3) = \delta^4(x_3 - x_f)$, $\psi_i(x_1) = \delta^4(x_1 - x_i)$, $A \approx \delta^4(x_2 - X)$, то, как видно из (27.2) — (27.4), амплитуда перехода оказалась бы равной непосредственно $J_\mu(x_f, X, x_i)$ и факт распространения сигнала с запрещенной скоростью был бы установлен.

Однако мы не можем использовать волновые пакеты, протяженность которых как угодно мала. Действительно, прием сигнала частицей заключается в *устанавливаемом факте* изменения ее импульса $p_i \rightarrow p_f$. Это изменение должно быть больше разброса импульсов $\Delta p_i \approx \hbar/b_i$, $\Delta p_f \approx \hbar/b_f$, $\Delta k \approx \hbar/a$ в исходных и в конечных пакетах, т. е. (считая $b_f \approx b_i \approx b$)

$$|p_f - p_i| = |q_{fi}| \geq \frac{\hbar}{b}, \quad |k| \geq \frac{\hbar}{a}. \quad (27.11)$$

Отсюда вытекает также неравенство

$$|p_f|, |p_i| \geq \frac{\hbar}{b}. \quad (27.11')$$

С другой стороны, размеры всех трех пакетов должны быть меньше размеров частицы:

$$b_f \ll R, \quad b_i \ll R, \quad a \ll R. \quad (27.12)$$

Так как условия (27.11) — (27.12) не противоречат квантовой механике, то на первый взгляд создается принципиальная возможность уловить сигнал, идущий внутри частицы со скоростью, большей скорости света. Однако, как показывает дальнейший расчет, эта возможность оказывается иллюзорной.

Для доказательства этого утверждения вычислим амплитуду вероятности T_{fi} для волновых пакетов ψ_f , ψ_i и A , удовлетворяющих условиям (27.11), (27.11') и (27.12). Эта амплитуда определяет интенсивность сигнала, принимаемого в центре частицы и ее периферической области.

Согласно (27.3) имеем

$$T_{fi} = \frac{i}{\hbar} \frac{b^3}{\pi^3} \int d^3x_2 dt_2 \int d^3p_3 d^3p_1 \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} b^2 [(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_f)^2 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_i)^2] + i q x_2 \right\} \times \\ \times u_f^*(p_3) F(q) u_i(p_1) \exp[-ikx_2] \times \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2a^2} \{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{X})^2 + [(\mathbf{x}_2 - \mathbf{u}t) - (\mathbf{X} - \mathbf{u}T)]^2\} \right]. \quad (27.13)$$

При этом, чтобы избежать излишних выкладок, мы положили $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_f = 0$, $b_f, b_i = b$.

Далее, введено обозначение $F(q) = a_\mu \gamma_4 \hat{J}_\mu(q)$. Если размеры пакетов b и a во много раз больше величин \hbar/p_f , \hbar/p_i и \hbar/k , то интегрирование в (27.13) сразу выполняется и дает обычный в теории рассеяния результат:

$$T_{fi} = \frac{2\pi i}{\hbar} \delta^4(k - q) u_f^*(p_f) F(q_{fi}) u_i(p_i). \quad (27.14)$$

Однако координаты места посылки сигнала (точка \mathbf{x}_2) и места его приема (точки \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_3) в этом случае полностью выпадают и поэтому остаются неопределенными.

Обратимся теперь к случаю пакетов малых размеров a и b , но все же удовлетворяющих условиям (27.11), (26.11'), (27.12).

По предположению $|q_{fi}| \gg \hbar/b \gg q_m$ (импульса частицы), поэтому множитель $F(q)$ можно вынести из-под знака интеграла. Мы вынесем также из-под знака интеграла медленно меняющиеся величины $u_f^*(p_f)$, $u_i(p_i)$.

Далее заметим (см. дополнение VIII), что

$$q_0 = E(p_3) - E(p_1) = E_f - E_i + V_f \xi - V_i \eta + \dots, \quad (27.15)$$

где

$$\xi = p_3 - p_f, \quad \eta = p_1 - p_i, \quad V_f = \nabla E_f, \quad V_i = \nabla E_i. \quad (27.15')$$

Интегрируя теперь по ξ и η , получим

$$T_{fi} = \frac{i}{\hbar} u_f^*(p_f) F(q_{fi}) u_i(p_i) \exp[i(kX - k_0T)] \times \\ \times \int d^3x dt e^{-\Phi(x, t)}, \quad (27.16)$$

где

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = i(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \mathbf{x} - i(k_0 - q_0)t + \frac{1}{2b^2}(\mathbf{x} - \mathbf{V}_t t)^2 + \frac{1}{2a^2}(\mathbf{x} - \mathbf{X})^2 + \frac{1}{2a^2}[(\mathbf{x} - \mathbf{u}t) - (\mathbf{X} - \mathbf{u}T)]^2 \quad (27.17)$$

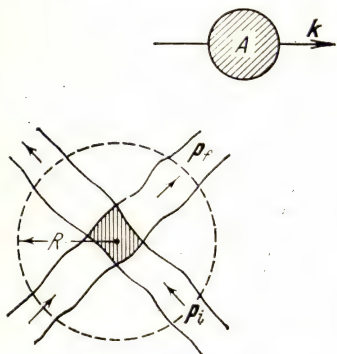


Рис. 29. Иллюстрация к распространению сигнала внутри микрочастицы. Перекрытие волновых пакетов начального (p_i) и конечного (p_f) состояний до некоторой степени имитирует δ^4 -образный источник. A изображает пакет фотонов. Взаимодействие возникает, когда все эти пакеты перекрываются.

(причем здесь для сокращения переобозначено $q_{ft} = q$, $E_f - E_i = q_0$).

Таким образом, амплитуда T_{fi} определяется перекрытием в пространстве и во времени четырех пакетов. Эта ситуация изображена на рис. 29. Существенно, что пакеты в точках $\mathbf{x}, t \approx 0$ и $\mathbf{x} \approx \mathbf{X}, t \approx T$ ограничены не только в пространстве, но и во времени, так что они до некоторой степени имитируют идеальные δ^4 -образные сигналы типа $\delta^4(x)$.

Вычисление последнего интеграла в (27.16) приводит к результату

$$T_{fi} = \frac{i}{\hbar} u_i^*(\mathbf{p}_f) F(q_{ft}) u_i(\mathbf{p}_i) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{X} - k_0 T)] \times \exp[-\Psi(\mathbf{X}, T)], \quad (27.18)$$

где $\Psi(\mathbf{X}, T)$ равно (см. дополнение VIII)

$$\Psi(\mathbf{X}, T) = \frac{1}{2a^2} \mathbf{X}^2 + \frac{1}{2a^2} (\mathbf{X} - \mathbf{u}T)^2 - \frac{C^2}{a^4 \Delta^2} [2\mathbf{X} - \mathbf{u}T]^2 - \frac{A^2}{a^4 \Delta^2} (\mathbf{X} - \mathbf{u}T, \mathbf{u})^2 - \frac{B}{a^4 \Delta^2} [(2\mathbf{X} - \mathbf{u}T)(\mathbf{X} - \mathbf{u}T, \mathbf{u})] + \frac{C^2}{\Delta^2} (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + \frac{A^2}{\Delta^2} (k_0 - q_0)^2 + \text{Im } \Psi. \quad (27.19)$$

Коэффициенты A^2, B^2, C^2, Δ^2 суть функции ширины пакетов a и b и трех скоростей $\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_f, \mathbf{u}$. Эта квадратичная форма положительно-дефинитна, и экспоненциальный

множитель $\exp[-\Psi(X, T)] \rightarrow 0$ при больших $|X|$ как $\exp(-X^2/d^2)$, где $d^2 \approx a^2$ (или $\approx b^2$). Это означает, что факт передачи сигнала от периферии к центру частицы может быть замечен лишь в том случае, если расстояние от периферии до центра $|X|$ не превышает ширину пакетов a или b .

Однако в этом случае волновые пакеты сильно перекрываются внутри частицы и передача импульса осуществляется непосредственным контактом.

Воображаемое пространственное распределение токов $J_\mu(x_3, x_2, x_1)$, которое могло бы передать сигнал с бесконечно большой скоростью, и в этом случае полностью выпадает из игры. Таким образом, пространственно протяженную частицу, оказывается, также невозможно уличить в передаче сигнала, идущего со скоростью, большей скорости света [54].

Результаты § 26 и этого параграфа можно рассматривать как указание на то, что в схему квантовой теории поля можно ввести отклонения от *принятой* формы причинности, которые из-за соотношения неопределенностей будут совместимы с *классическими представлениями* о причинности.

§ 28. Условия микропричинности в квантовой теории поля

Состояние системы в квантовой теории определяется волновой функцией Ψ —вектором в пространстве Гильберта, зависящим от времени t и от динамических переменных $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_N$, характеризующих рассматриваемую систему. В случае теории поля число таких динамических переменных бесконечно велико ($N \rightarrow \infty^3$), так как посредством их надлежит описать мгновенное состояние полей во всем пространстве $\mathfrak{H}_3(\mathbf{x})$. Поэтому волновая функция в этом случае является функционалом и зависит от некоторых функций $A(\mathbf{x}), B(\mathbf{x}), \dots$, характеризующих рассматриваемые поля. Далее, из релятивистских соображений целесообразно рассматривать Ψ не как функцию t , а как функционал от некоторой пространственноподобной поверхности $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{x})$, которая только в частном случае вырождается в плоскость $t = \sigma(\mathbf{x}) = \text{const.}$

Подчеркивая функциональную зависимость волнового функционала Ψ от поверхности $\sigma(x)$ и полей $A(x)$, $B(x)$, ..., мы будем писать аргументы Ψ в фигурных скобках:

$$\Psi = \Psi \{ \sigma(x), A(x), B(x), \dots \}. \quad (28.1)$$

Нормировка этого функционала, определяющая нормировку вероятностей,

$$(\Psi, \Psi) = \int \bar{\Psi} \Psi d\Omega \{ A(x), B(x), \dots \}, \quad (28.2)$$

где интеграл взят в пространстве функций $A(x)$, $B(x)$, ..., должна сохраняться во времени, иными словами, не должен зависеть от выбора поверхности $\sigma(x)$.

Рассмотрим теперь значение полевого функционала Ψ на поверхности σ' , которая отличается от поверхности σ



Рис. 30. Пространственноподобная поверхность $\sigma(x)$ и ее вариация в области $(x, x+dx)$.

только в окрестности точки x и лежит позднее ее (см. рис. 30). Если σ' и σ отличаются бесконечно мало:

$$\sigma'(x) = \sigma(x) + \delta\sigma(x), \quad (28.3)$$

то новый функционал $\Psi' \equiv \Psi \{ \sigma'(x), A(x), B(x), \dots \}$ мы можем выразить через функциональную производную $\delta\Psi/\delta\sigma(x)$ функционала по поверхности $\sigma(x)$ в точке x (см. дополнение IX):

$$\Psi' \equiv \Psi \{ \sigma' \} = \Psi \{ \sigma, A, B, \dots \} + \int \frac{\delta\Psi \{ \sigma, A, B, \dots \}}{\delta\sigma(x)} \delta\sigma(x) d^3x. \quad (28.4)$$

Заметим, что величина $\delta\sigma(x) d^3x$ есть бесконечно малый четырехмерный объем, заключенный между поверхностями σ и σ' (см. рис. 30).

Мы обратимся теперь к принципу причинности, который сформулируем классическим образом: *последующее по времени состояние Ψ' однозначно определяется предшест-*

вующим состоянием Ψ . Отсюда следует, что определенное в (28.4) приращение функционала должно однозначно определяться самим этим функционалом.

Далее, в силу линейности теории связь между приращением функционала $\Psi' - \Psi$ и самим функционалом Ψ должна быть линейной. На основании этих аргументов, пользуясь принятым определением функциональной производной, мы можем написать

$$\frac{\delta\Psi}{\delta\sigma(x)} = i\hat{\eta}\Psi, \quad (28.5)$$

где $\hat{\eta}$ — линейный эрмитов оператор. Множитель i продиктован требованием постоянства нормы функционала (Ψ, Ψ) . Действительно, варьируя норму (Ψ, Ψ) , нетрудно проверить, что вариация $\delta(\Psi, \Psi)$ только в том случае равна нулю, если оператор $i\hat{\eta}$ антиэрмитов, т. е. если $(i\hat{\eta})^+ = -i\hat{\eta}^+ = -i\hat{\eta}$, так что оператор $\hat{\eta}$ эрмитов. Его можно представить в виде

$$\hat{\eta} = -\frac{\hat{W}}{\hbar}, \quad (28.6)$$

где \hat{W} , по определению, есть эрмитов оператор энергии взаимодействия полей и является функцией операторов этих полей $\hat{A}(x)$, $\hat{B}(x)$, ...

Уравнение (28.5) теперь приобретает вид

$$i\hbar \frac{\delta\Psi}{\delta\sigma(x)} = \hat{W}\Psi. \quad (28.7)$$

Это — известное уравнение Томонага — Швингера. Функциональная производная $\delta\Psi/\delta\sigma(x)$ и функционал Ψ являются инвариантами. Отсюда следует, что оператор \hat{W} должен быть релятивистским инвариантом.

При $\hat{W} = 0$ функционал Ψ оказывается постоянным. Это означает, что мы выбрали так называемое *представление взаимодействия*, когда свободные невзаимодействующие поля описываются постоянным по времени функционалом Ψ_0 .

Возьмем теперь вторую вариацию от функционала Ψ , варьируя эту же пространственноподобную поверхность

$\sigma(x)$ около некоторой другой точки y . Из (28.7) получим

$$i\hbar \frac{\delta^2 \Psi}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(y)} = \hat{W}(x) \frac{\delta \Psi}{\delta \sigma(y)} = \frac{1}{i\hbar} \hat{W}(x) \hat{W}(y) \Psi. \quad (28.8)$$

Выполняя теперь эти же вариации в другом порядке и вычитая результаты, найдем

$$[\hat{W}(x), \hat{W}(y)] = 0 \text{ при } x \sim y, \quad (28.9)$$

т. е. операторы энергии взаимодействия полей, взятые в разных точках x и y , должны коммутировать, поскольку точки x и y лежат на разных пространственно-подобных поверхностях так что не могут быть соединены световым сигналом.

Так как оператор \hat{W} есть функция операторов квантованных полей $\hat{A}(x)$, $\hat{B}(x)$, то условие (28.9) будет выполнено само собой при соблюдении условия локальной коммутативности полей, т. е. условия микропричинности, описанного в § 25. Поэтому условие (28.9) может рассматриваться как важнейший вывод из принципа микропричинности. Впервые оно, в несколько иной форме, было получено Ф. Блохом [55].

В заключение заметим еще одно существенное следствие принципа причинности: изменение волнового функционала Ψ за конечное время, при переходе от одной пространственно-подобной поверхности $\sigma_1(x)$ к лежащей позднее поверхности $\sigma_2(x)$, можно представить как унитарное преобразование с оператором $\hat{U}(\sigma_2, \sigma_1)$, являющееся последовательностью бесконечно малых унитарных преобразований.

Действительно, из (28.4) и (28.7) следует, что *)

$$\Psi' \equiv \Psi \{ \sigma_1 + \delta \sigma(x) \} = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \hat{W}(x) \delta \sigma(x) d^3 x \right) \Psi \{ \sigma(x) \}. \quad (28.10)$$

Применяя этот оператор во всех точках поверхности $\sigma_1(x)$, мы получим значение функционала Ψ' на поверхности $\sigma_1'(x)$, лежащей позднее, но бесконечно близко к поверхности

*) Мы опускаем здесь зависимость Ψ от динамических переменных $A(x)$, $B(x)$.

$\sigma_1(x)$. При этом, в силу (28.8), порядок применения операторов $\left(1 - \frac{i}{\hbar} \hat{W}(x) \delta\sigma(x) d^3x\right)$ несуществен.

В результате получим

$$\Psi'' = \Psi\{\sigma_1''(x)\} = \left[1 - \frac{i}{\hbar} \int_{\sigma_1}^{\sigma_1''} \hat{W}(x) d^4x\right] \Psi\{\sigma_1(x)\}. \quad (28.10')$$

Таким же образом перейдем от поверхности σ_1'' к поверхности σ_1''' , лежащей позднее поверхности σ_1'' , но бесконечно близко к ней. Повторяя эту операцию бесконечное число раз, найдем

$$\Psi\{\sigma_2\} = \hat{U}(\sigma_2, \sigma_1) \Psi\{\sigma_1\}, \quad (28.11)$$

где унитарный оператор $\hat{U}(\sigma_2, \sigma_1)$ равен

$$\hat{U}(\sigma_2, \sigma_1) = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \hat{W}(x) d^4x\right). \quad (28.12)$$

Здесь буква T указывает на упорядочение по времени. Унитарность оператора $\hat{U}(\sigma_2, \sigma_1)$ непосредственно следует из эрмитовости оператора \hat{W} . Формулу (28.12) для оператора $\hat{U}(\sigma_2, \sigma_1)$ совместно с условием (28.9) можно рассматривать как выражение принципа микропричинности на языке волновых функционалов.

Из (28.7), (28.11) и (28.12) следует, что оператор $\hat{U}(\sigma_2, \sigma_1)$ удовлетворяет уравнению Томонага—Швингера. Запишем его в специальном виде, полагая $\sigma_1 = -\infty$, $\sigma_2 = \sigma$. Тогда имеем

$$i\hbar \frac{\delta \hat{U}(\sigma, -\infty)}{\delta \sigma(x)} = \hat{W}(x) \hat{U}(\sigma, -\infty). \quad (28.13)$$

Для специального случая плоской пространственно-подобной поверхности $\sigma = nx$, где n — единичный времени-подобный вектор ($n^2 = 1$, $n_0 > 0$), вариация $\delta\sigma$ сводится к малому смещению $d\sigma$ всей плоскости σ по направлению вектора n , так что $\delta\sigma = d\sigma d^3x$. Умножая уравнение (28.13) на d^3x и интегрируя по трехмерному объему, получим

$$i\hbar \frac{d\hat{U}(\sigma_1, -\infty)}{d\sigma} = \hat{W}(\sigma) \hat{U}(\sigma_1, -\infty), \quad (28.14)$$

где

$$\hat{W}(\sigma) = \int \hat{W}(x) d^3x = \int \hat{W}(x) \delta(\sigma - nx) d^4x. \quad (28.15)$$

В этой форме уравнение Томонага—Швингера напоминает обыкновенное уравнение Шредингера в *представлении взаимодействия* *).

Обратимся теперь к связи оператора \hat{U} с матрицей рассеяния \hat{S} . По определению матрица рассеяния \hat{S} преобразует состояние микросистемы, заданное в бесконечно удаленном прошлом $\Psi(-\infty)$, в состояние микросистемы в бесконечно удаленном будущем $\Psi(+\infty)$:

$$\Psi(+\infty) = \hat{S}\Psi(-\infty). \quad (28.16)$$

Из (28.11) следует, что $\Psi(-\infty)$ есть предельное значение $\Psi\{\sigma_1\}$, когда поверхность σ_1 отодвигается в $-\infty$, а $\Psi\{+\infty\}$ —предельное значение $\Psi\{\sigma_2\}$, когда поверхность σ_2 отодвигается в $+\infty$ **). Следовательно, матрица рассеяния \hat{S} есть унитарный оператор

$$\hat{S}\hat{S}^+ = \hat{I}. \quad (28.17)$$

являющийся предельным значением оператора $\hat{U}\{\sigma_2, \sigma_1\}$ при $\sigma_2 \rightarrow +\infty$ и $\sigma_1 \rightarrow -\infty$:

$$\hat{S} = \hat{U}\{\sigma_2, \sigma_1\} = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int \hat{W}(x) d^4x\right), \quad (28.18)$$

где интегрирование в экспоненте распространено уже на все пространство—время $\mathfrak{R}_4(x)$.

Вместо матрицы \hat{S} часто вводят матрицу амплитуды рассеяния \hat{T} , связанную с матрицей \hat{S} соотношением

$$\hat{S} = \hat{I} + i\hat{T}. \quad (28.19)$$

*) Релятивистский характер представления взаимодействия и уравнение в форме (28.14) впервые были указаны в дипломной работе [56].

**) В § 32 мы рассмотрим подробно физический смысл предельного перехода $\sigma \rightarrow \pm \infty$.

Соотношение унитарности для матрицы \hat{T} , как это следует из (28.17), имеет вид *)

$$i(\hat{T}^+ - \hat{T}) = \hat{T}\hat{T}^+. \quad (28.20)$$

Обозначая частное начальное состояние через Ψ_i ($\Psi_i = \Psi(-\infty)$), а частное конечное состояние через Ψ_f , получим амплитуду вероятности перехода $i \rightarrow f$:

$$S_{fi} = \langle \Psi_f | \hat{S} | \Psi_i \rangle, \quad (28.21)$$

и при $i \neq f$ — вероятность перехода из состояния i в состояние f :

$$P_{fi} = |\langle \Psi_f | i\hat{T} | \Psi_i \rangle|^2. \quad (28.22)$$

§ 29. Микропричинность в теории матрицы рассеяния

Впервые Штюкельберг [53] и его коллеги пытались развить теоретическую схему, в которой \hat{S} -матрица вводилась в теорию непосредственно, без обращения к уравнению Шредингера (28.7), связывающего, в отличие от \hat{S} -матрицы, бесконечно близкие по времени и пространству состояния. При этом было обращено внимание на принципиальную важность формулировки принципа причинности непосредственно для самой \hat{S} -матрицы. Существенный успех в этом направлении был достигнут позднее в работах Н. Н. Боголюбова, который применил несколько формальный, но оказавшийся весьма эффективным прием локального адиабатического «включения» и «выключения» взаимодействия [38].

Матрица рассеяния \hat{S} является функционалом от оператора энергии взаимодействия. Введем другой, вспомогательный, оператор

$$\hat{W}_g(x) = g(x) \hat{W}(x), \quad (29.1)$$

где функция $g(x)$ принимает любые значения в интервале от 0 до 1.

Если построить матрицу рассеяния на основе взаимодействия $\hat{W}_g(x)$, то она будет функционалом от $g(x)$ —

*) Из этого соотношения вытекает оптическая теорема, приведенная в § 23 (см. (XII.4)).

величины, определяющей степень «включения» взаимодействия в той или иной области пространства—времени:

$$\hat{S} = \hat{S} \{g(x)\}. \quad (29.2)$$

При $g(x) = 0$ взаимодействие полностью выключено и $\hat{S} \{g(x)\} = 1$, при $g(x) = 1$ взаимодействие полностью включено и $\hat{S} \{g(x)\} = \hat{S}$ — полной матрице рассеяния (28.18).

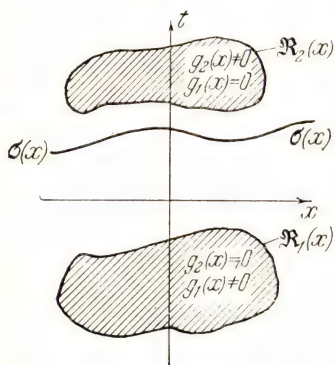


Рис. 31. Две области $\mathfrak{N}_1(x)$ и $\mathfrak{N}_2(x)$, из которых вторая лежит полностью позднее (выше) пространственноподобной поверхности $\sigma(x)$. В области $\mathfrak{N}_1(x)$ взаимодействие включено с силой, определяемой «зарядом» $g_1(x)$; в области $\mathfrak{N}_2(x)$ это же взаимодействие определяется зарядом $g_2(x)$.

в будущем, в области $\mathfrak{N}_2(x)$, не должно влиять на состояние $\Psi \{\sigma\}$:

$$\Psi \{\sigma\} = \hat{S} \{g_1(x)\} \Psi(-\infty). \quad (29.4)$$

Конечное состояние $\Psi \{g\}$ получится из $\Psi \{\sigma\}$ применением оператора $\hat{S} \{g_2(x)\}$ *):

$$\Psi \{g(x)\} = \hat{S} \{g_2(x)\} \hat{S} \{g_1(x)\} \Psi(-\infty), \quad (29.5)$$

Рассмотрим теперь специальный случай, когда функция включения $g(x)$ отлична от нуля в двух областях пространства—времени: $\mathfrak{N}_2(x)$ и $\mathfrak{N}_1(x)$, причем область $\mathfrak{N}_2(x)$ лежит целиком позднее некоторой пространственноподобной поверхности $\sigma(x)$, а область $\mathfrak{N}_1(x)$ — раньше ее (см. рис. 31). Очевидно, что

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x), \quad (29.3)$$

причем $g_1 \neq 0$ в $\mathfrak{N}_1(x)$, а $g_2 \neq 0$ в $\mathfrak{N}_2(x)$. Волновой функционал $\Psi \{\sigma\}$ на поверхности σ может быть получен из начального состояния $\Psi(-\infty)$ с помощью \hat{S} -матрицы, зависящей только от взаимодействия в области $\mathfrak{N}_1(x)$; взаимодействие

*) Заметим, что ввиду выключения взаимодействия на поверхности σ функционал $\Psi \{\sigma\} = \Psi \{+\infty, g(x)\}$.

откуда следует, что

$$\hat{S}\{g(x)\} = \hat{S}\{g_2(x)\} \hat{S}\{g_1(x)\}. \quad (29.6)$$

Сравним теперь два случая, которые друг от друга отличаются только взаимодействием в области $\mathfrak{N}_2(x)$, так что

$$g'(x) = g_2'(x) + g_1(x) \quad \text{и} \quad g''(x) = g_2''(x) + g_1(x). \quad (29.7)$$

Составим выражение $\hat{S}(g'') \hat{S}^+(g')$. Согласно (29.6) имеем

$$\hat{S}(g'') = \hat{S}(g_2'') \hat{S}(g_1), \quad \hat{S}^+(g') = \hat{S}^+(g_1) \hat{S}^+(g_2'), \quad (29.8)$$

следовательно,

$$\hat{S}(g'') \hat{S}^+(g') = \hat{S}(g_2'') \hat{S}^+(g_2'), \quad (29.9)$$

т. е. это выражение не зависит от предшествующей истории системы в области $\mathfrak{N}_1(x)$.

Удобно сформулировать этот вывод в дифференциальной форме. Будем считать, что $g_2'(y)$ и $g_2''(y)$ отличаются друг от друга бесконечно мало, так что $\delta g(y) = g_2''(y) - g_2'(y)$, причем $\delta g(y) \neq 0$ в $\mathfrak{N}_2(y)$, т. е. в области, лежащей позднее σ . В этом случае

$$\hat{S}(g'') = \hat{S}(g') + \int \frac{\delta \hat{S}}{\delta g'} \delta g'(y) dy. \quad (29.10)$$

Опуская теперь штрихи, мы можем записать (29.9) в форме

$$\hat{S}(g + \delta g) \hat{S}^+(g) = 1 + \delta \hat{S}(g) \hat{S}^+(g). \quad (29.11)$$

Это выражение не должно зависеть от поведения g в области $\mathfrak{N}_1(x)$.

Поэтому вариационная производная от выражения (29.11) по $g(x)$ (причем точка $x \in \mathfrak{N}_1(x)$) должна равняться нулю. Следовательно,

$$\frac{\delta}{\delta g(x)} \left(\frac{\delta \hat{S}(g)}{\delta g(y)} \hat{S}^+(g) \right) = 0, \quad (29.12)$$

если точка x предшествует по времени точке y ($y > x$). Соотношение (29.12) релятивистски ковариантно. В случае пространственного интервала между точками x и y ($x \sim y$) выбором системы координат всегда можно сделать y «позд-

нее» x . Поэтому условие (29.12) выполняется и в том случае, когда точки x и y разделены пространственно-подобным интервалом. Условие (29.12) является выражением принципа причинности на языке матрицы рассеяния.

Как было показано (см. [38]), на основе требований:

1) релятивистской инвариантности, 2) унитарности, 3) причинности (в форме (29.12)) можно построить \hat{S} -матрицу, не обращаясь к уравнению Шредингера *).

Отсылая читателя к монографии [38], где изложены необходимые доказательства, мы ограничимся здесь построением этой матрицы с точностью до второго приближения по константе взаимодействия. Таким образом, дальнейшие выкладки являются только иллюстрацией к изложенным в этом параграфе идеям.

Запишем матрицу \hat{S} в виде функционального ряда по степеням $g(x)$:

$$\hat{S} = 1 + \frac{1}{1!} \int \hat{S}_1(x_1) g(x_1) d^4 x_1 + \\ + \frac{1}{2!} \int \hat{S}_2(x_1, x_2) g(x_1) g(x_2) d^4 x_1 d^4 x_2 + \dots \quad (29.13)$$

Поскольку мы условились считать, что при полном включении взаимодействия $g(x)=1$, то мы примем, что операторы $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \dots, \hat{S}_n$, пропорциональны степеням $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^n$ некоторого малого параметра, имеющего смысл константы связи («заряда» **).

Подставляя выражение (29.13) для \hat{S} в условие унитарности (28.17), получим, с точностью до ε^2 ,

$$\hat{S}_1(x) + \hat{S}_1^+(x) = 0, \quad (29.14)$$

$$\hat{S}_2(x, y) + \hat{S}_2^+(x, y) + \hat{S}_1(x) \hat{S}_1^+(y) + \hat{S}_1(y) \hat{S}_1^+(x) = 0 \quad (29.15)$$

и т. д. ***).

Из первого соотношения следует, что

$$\hat{S}_1(x) = i\hat{L}(x), \quad (29.16)$$

*) При этом необходимо еще выполнение некоторых математических требований к операторам, входящим в структуру \hat{S} -матрицы (см. [38]).

**) Например, в электродинамике $\varepsilon = e/\sqrt{\hbar c}$.

***)) Здесь мы ввели новые обозначения $x_1 = x, x_2 = y$, что удобно, поскольку мы ограничиваемся вторым приближением.

где $\hat{L}(x)$ — некоторый эрмитов оператор:

$$\hat{L}(x) = \hat{L}^+(x). \quad (29.17)$$

Условие (29.15) выполняется автоматически при выполнении (29.16) и условия причинности (29.12). Подставив в (29.12) разложение (29.13), после несложных выкладок найдем условие причинности (с точностью до ε^2):

$$\hat{S}_2(x, y) + \hat{S}_1(x) \hat{S}_1^+(y) = 0 \quad (29.18)$$

при $y > x$.

Учитывая (29.16), находим $\hat{S}_2(x, y)$:

$$\hat{S}_2(x, y) = -\hat{L}(x) \hat{L}(y) \text{ при } y > x. \quad (29.19)$$

Ввиду равноправия точек x и y имеем

$$\hat{S}_2(y, x) = \hat{S}_2^+(x, y) = -\hat{L}(y) \hat{L}(x) \text{ при } y < x. \quad (29.19')$$

Оба выражения перекрываются в области $x \sim y$ и будут совместны, если

$$[\hat{L}(x), \hat{L}(y)] = 0 \text{ при } x \sim y. \quad (29.20)$$

Это требование называют *требованием локальности*.

Оба выражения (29.19) и (29.19') можно объединить в одно, если воспользоваться знаком T -произведения:

$$\hat{S}_2(x, y) = i^2 T [\hat{L}(x) \hat{L}(y)]. \quad (29.21)$$

Подставляя полученные выражения для $\hat{S}_1(x)$ и $\hat{S}_2(x, y)$ в ряд (29.13), найдем

$$\begin{aligned} \hat{S}(g) = & \hat{I} + \frac{i}{i!} \int \hat{L}(x) g(x) d^4x + \\ & + \frac{i^2}{2!} T \left\{ \int \hat{L}(x) \hat{L}(y) g(x) g(y) d^4x d^4y \right\} + \dots \end{aligned} \quad (29.22)$$

Продолжая последовательно изложенную процедуру, можно получить весь ряд (29.13), который суммируется в символическую экспоненту:

$$\hat{S}(g) = T \left\{ \exp i \int \hat{L}(x) g(x) d^4x \right\}. \quad (29.23)$$

Эта формула при $g(x) = 1$ совпадает с формулой для матрицы \hat{S} (28.18), полученной на основе уравнения Шре-

дингера для волнового функционала, если положить в (29.23)

$$\hat{L}(x) = -\frac{1}{\hbar} \hat{W}(x). \quad (29.24)$$

Поэтому требование локальности (29.20) совпадает с установленным ранее условием Блоха (28.9).

Из выражения (29.23) следует, что требование релятивистской инвариантности S -матрицы будет выполнено, если при неоднородном преобразовании Лоренца

$$x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu \quad (29.25)$$

(символически $x' = Lx + a$) функция включения $g(x)$ будет скаляром, а оператор энергии взаимодействия $\hat{W}(x)$ — релятивистским инвариантом. Это значит, что при преобразовании имеет место соотношение

$$g(x) \rightarrow g'(x') = g(L^{-1}(x' - a)), \quad (29.26)$$

иными словами, новая функция g' имеет ту же величину в той же физической точке пространства—времени, что и непреобразованная функция g .

Далее, оператор энергии взаимодействия $\hat{W}(x)$ есть функция операторов полей $\hat{A}(x)$, $\hat{B}(x)$, которые преобразуются при преобразовании Лоренца по формулам

$$\hat{A}'(x') = S_L \hat{A}[L^{-1}(x' - a)], \quad (29.27)$$

причем вид матрицы S_L зависит от ковариантных свойств поля (для скалярного поля $S_L = 1$, для векторного поля она совпадает с матрицей L , так что $S_L = L$, и т. п.).

Так как оператор $\hat{A}'(x')$ дает совершенно ту же физическую информацию, что и непреобразованный оператор $\hat{A}(x)$, то оба оператора, согласно общим принципам квантовой теории, должны быть связаны унитарным преобразованием

$$\hat{A}'(x') = U_L \hat{A}(x) U_L^{-1}, \quad (29.28)$$

причем унитарный оператор U_L полностью определяется лоренцевым преобразованием (29.25).

Если оператор энергии \hat{W} является инвариантом, то при этом преобразовании будем иметь

$$\begin{aligned}\hat{W}' &\equiv W' \{ \hat{A}'(x') \} = W \{ \hat{A}'(x') \} = \\ &= W \{ U_L \hat{A}(x) U_L^{-1} \} = U_L W \{ \hat{A}(x) \} U_L^{-1} = W \{ \hat{A}(x) \} = \hat{W}(x).\end{aligned}\quad (29.29)$$

Так как матрица \hat{S} есть функционал (29.23) от оператора \hat{W} , то тем самым доказывается релятивистская инвариантность матрицы \hat{S} .

В заключение этого раздела заметим, что наличие сингулярных функций типа $D(x)$, $S(x)$, входящих в правило перестановки компонент квантованных полей, и функций $D_c(x)$, $S_c(x)$, входящих в T -произведение квантованных полей, приводит к тому, что элементы матрицы рассеяния \hat{S} оказываются расходящимися и для получения физически осмысленных результатов в функциональном ряде (29.13) необходимо произвести определенные изменения, которые исключают вклад предельно малых расстояний.

Эти «определенные изменения» получили название *правил перенормировки*. Эти правила подробно освещены в существующей литературе (см. [37, 38]), и мы не будем воспроизводить их в этой монографии, цель которой совершенно иная. Мы ограничимся лишь замечанием, что эти правила, привнесенные извне, таковы, что не нарушают основных требований релятивистской ковариантности, унитарности и причинности в применении к \hat{S} -матрице. Однако нельзя освободиться от впечатления, что эти правила перенормировки поддерживают жизнь современной теории поля за счет потери изящества и логической стройности этой теории.

§ 30. Причинность и аналитические свойства матрицы рассеяния

Важным следствием микропричинности являются определенные аналитические свойства матричных элементов матрицы рассеяния T_{fi} (амплитуд рассеяния), определяющих вероятности квантовых переходов из некоторого начального состояния i в конечное f .

Впервые на эти свойства было обращено внимание еще в классической электродинамике Р. Кронигом [57] и Г. Кра-

мерсом [58], которые, исходя из требования, чтобы скорость распространения сигналов не превосходила скорости света в пустоте, установили интегральное соотношение между действительной частью показателя преломления световых волн $\text{Re } n(\omega)$ (ω — частота колебаний) и его мнимой частью $\text{Im } n(\omega)$:

$$\text{Re } n(\omega) = \text{Re } n(0) - \frac{2\omega^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } n(\omega')}{\omega'(\omega'^2 - \omega^2)} d\omega'. \quad (30.1)$$

Соотношения такого типа получили название *дисперсионных соотношений*. Основой дисперсионных соотношений является теорема Коши. Связь их с причинностью может быть иллюстрирована следующим простым примером.

Пусть в точке $x=0$ находится микрочастица, рассеивающая падающую на нее волну. Эту падающую волну мы представим в виде интеграла:

$$\psi_0\left(t - \frac{x}{c}\right) = \frac{A}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left[-iz\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]}{z - (\omega_0 - i\varepsilon)} dz, \quad (30.2)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$.

Перенесем интегрирование в (30.2) в комплексную плоскость $z = \omega + i\Gamma$ и замкнем при $t - x/c > 0$ контур интегрирования бесконечно большим полукругом $R = |z| \rightarrow \infty$ в нижней полуплоскости $\Gamma < 0$ (см. рис. 32). При этом в интеграле появится «режущий» множитель $\exp[\Gamma(t - x/c)]$, так что при $R \rightarrow \infty$ вклад от интеграла по полукругу будет равен нулю. При $t - x/c < 0$ контур следует замкнуть в верхней полуплоскости, «режущий» множитель $\exp[-\Gamma(t - x/c)]$ при $R \rightarrow \infty$ уничтожит вклад от интегрирования по бесконечному полукругу. Интеграл

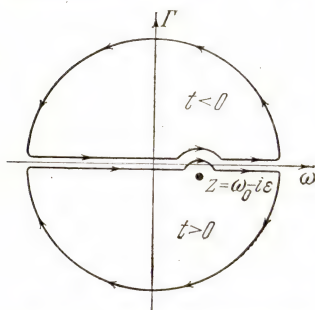


Рис. 32. Контур интегрирования в комплексной плоскости ω для $t > 0$ и $t < 0$.

(30.2) в первом случае окажется равным вычету в точке $z = \omega_0 - i\varepsilon$, а во втором случае, в силу отсутствия сингулярности в верхней полуплоскости, — нулю.

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\psi_0\left(t - \frac{x}{c}\right) = \begin{cases} A \exp\left[-i\omega_0\left(t - \frac{x}{c}\right)\right], & \text{когда } t - \frac{x}{c} > 0, \\ 0, & \text{когда } t - \frac{x}{c} < 0. \end{cases} \quad (30.3)$$

Пусть, далее, $T(\omega)$ есть элемент матрицы рассеяния, трансформирующий плоскую падающую волну $\exp[-i\omega(t - x/c)]$ в волну рассеянную (мы сейчас ограничиваемся одним пространственным измерением). Тогда вся рассеянная волна приобретает вид

$$\psi(t, x) = \frac{A}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} T(z') \frac{\exp\left[-iz'\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]}{z' - (\omega_0 - i\varepsilon)} dz', \quad (30.4)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$. Из принципа причинности следует, что рассеянная волна $\psi(t, x)$ не может возникнуть раньше, чем падающая волна $\psi_0(t - x/c)$ достигнет рассеивающей частицы. Иными словами,

$$\psi(t, 0) = 0 \quad \text{для } t < 0. \quad (30.5)$$

Очевидно, что это требование не будет выполняться при любых $T(\omega)$.

Будем рассматривать $T(\omega)$ как функцию комплексной переменной $z = \omega + i\Gamma$. Пусть $T(z)$ исчезает на круге бесконечно большого радиуса $R = |z| \rightarrow \infty$ и имеет особенности только на действительной оси. При этих ограничениях на поведение амплитуды $T(z)$ в комплексной плоскости $z = \omega + i\Gamma$ мы можем переписать (30.4) для точки $x = 0$ в виде

$$\psi(t, 0) = \frac{A}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} T(z) \frac{e^{-izt}}{z - (\omega_0 - i\varepsilon)} dz \quad (30.4')$$

(здесь $\varepsilon \rightarrow 0$).

По предположению функция $T(z)$ регулярна на бесконечно больших полукругах $R \rightarrow \infty$ и не имеет особенностей внутри них. Поэтому мы можем применить к (30.4') тот же метод интегрирования, что был использован для вычисления интеграла (30.2). Обходя возможные особенности

$T(z)$ на действительной оси сверху ($z = \omega + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$) и замыкая контур интегрирования при $t > 0$ полукругом в нижней полуплоскости, мы получим некоторое значение $\psi(t, 0)$, вообще говоря отличное от нуля. При $t < 0$ контур замыкается сверху и ввиду отсутствия особенностей $\psi(t, 0) = 0$.

Таким образом, если амплитуда $T(\omega)$ обладает указанными выше аналитическими свойствами, то рассеянная волна (30.4') удовлетворяет условию причинности (30.5).

Применим теперь теорему Коши к амплитуде $T(\omega)$:

$$T(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{T(z) dz}{z - \omega}, \quad (30.6)$$

В качестве контура интегрирования возьмем линию, идущую по реальной оси, обходящую сверху точку $z = \omega$ и замыкающуюся в нижней полуплоскости бесконечно большим полукругом $R = |z| \rightarrow \infty$. С учетом того, что на этом полукруге $T = 0$, интегрируем по бесконечно малому полукругу около точки $z = \omega$ и, разделяя $T(\omega)$ на действительную и мнимую части, получим

$$\operatorname{Re} T(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} T(\omega') d\omega'}{(\omega' - \omega)}, \quad (30.7)$$

где знаком \int обозначено главное значение интеграла около точки $\omega' = \omega \pm \rho$, $\rho \rightarrow 0$. Соотношение (30.7) есть простейшее *дисперсионное соотношение* для амплитуды рассеяния $T(\omega)$.

Допустим теперь, что амплитуда $T(z)$ имеет другие особенности, кроме тех, которые лежат на действительной оси.

Рассмотрим сначала случай, когда амплитуда $T(z)$ имеет существенно особую точку при $|z| \rightarrow \infty$. Положим

$$T(z) = \bar{T}(z) e^{-iz\tau}, \quad (30.8)$$

где $\tau = a/c$, a — некоторая длина, а функция $\bar{T}(z)$ обладает свойствами, рассмотренными ранее. Тогда

$$\psi(t, 0) = \frac{A}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{T}(z) e^{-iz(t+\tau)}}{z - (\omega_0 - i\varepsilon)} dz. \quad (30.9)$$

Применяя к этому интегралу изложенный выше метод вычисления, мы убедимся, что $\psi(t, 0)$ будет не равна нулю уже при $t > -\tau$, т. е. рассеянная волна возникает ранее, чем волна падающая достигает микрочастицы. Такое поведение нарушает причинность и может интерпретироваться как наличие у микрочастицы некоторых линейных размеров a («элементарная длина»), причем сигнал внутри частицы распространяется бесконечно быстро. Таким образом, нарушение корректного поведения амплитуды $T(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ ведет к нарушению причинности.

Допустим теперь, что амплитуда $T(z)$ имеет полюсы на мнимой оси $z = \pm i\Lambda$. Нетрудно видеть, что и в этом случае будет нарушаться причинность, так как теперь из-за наличия полюса $z = i\Lambda$ ($\Lambda > 0$) в верхней полуплоскости амплитуда рассеянной волны $\psi(t, 0)$ при $t < 0$ будет равна

$$\psi(t, 0) = A \frac{\text{Res } T(i\Lambda)}{i\Lambda - \omega_0} e^{+\Lambda t}, \quad (30.10)$$

что нарушает причинность во времени $|t| \sim 1/\Lambda$; при $t > 0$ возникает дополнительный член с множителем $e^{-\Lambda t}$, затухающий при $t \gg 1/\Lambda$.

Как видно из (30.7), дисперсионные соотношения связывают действительную часть амплитуды рассеяния с мнимой. В некоторых случаях интеграл в (30.7) можно выразить через наблюдаемые величины, и поэтому экспериментальная проверка дисперсионных соотношений может служить для проверки основных положений современной локальной теории поля, в частности важнейшего для всей теории принципа микропричинности.

Однако установление аналитических свойств элементов матрицы рассеяния S_{fi} исходя из общих принципов локальной теории поля представляется сложнейшей и еще не решенной задачей.

Только в простейшем случае упругого рассеяния частиц, благодаря работам М. Гольдбергера [59], К. Симанчика [60], Н. Н. Боголюбова [61] и др., был достигнут существенный прогресс. В частности, для упругого рассеяния вперед (на угол $\theta^\circ = 0$) π -мезонов на нуклонах удалось получить дисперсионное соотношение, не содержащее ненаблюдаемых величин.

Наиболее последовательное по математической строгости доказательство этих соотношений принадлежит Н. Н. Боголюбову, и мы отсылаем читателя к его монографии [61]. В этом разделе мы ограничимся только очерком теории дисперсионных соотношений в той мере, в какой это будет необходимо нам для дальнейшего.

Основой для построения дисперсионных соотношений для πN -рассеяния является релятивистское обобщение теоремы об аналитичности фурье-образа функции, исчезающей при $t < 0$.

Пусть $F(x)$ есть функция от $x(x, t)$, исчезающая вне светового конуса абсолютного будущего, т. е. при $x \leq 0$. Рассмотрим ее фурье-образ $\bar{F}(k)$:

$$\bar{F}(k) = \int F(x) \exp(ikx) d^4x. \quad (30.11)$$

Напомним, что $kx = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{x}$, так что при комплексных значениях k , т. е. при $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + i\mathbf{q}$, $\omega \rightarrow \omega + i\Gamma$, экспонента в (30.11) приобретает вид $\exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t) + (\mathbf{q}\mathbf{x} - \Gamma t)]$. В области значений Γ , где

$$\Gamma^2 - \mathbf{q}^2 > 0, \quad \Gamma > 0, \quad (30.12)$$

можно выбрать такую систему координат, что $\mathbf{q} = 0$. Тогда множитель $e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ в (30.11) приобретает фактор обрезания $e^{-\Gamma t}$, и благодаря ему интеграл (30.11) и его производные по k любого порядка будут сходиться. Тем самым доказывается, что фурье-образ $\bar{F}(k)$ является аналитической функцией переменной k в области (30.12); можно также показать, что при $|k| \rightarrow \infty$ $\bar{F}(k)$ имеет рост не выше некоторой степени $|k|^n$ (см. [61]).

Дисперсионные соотношения устанавливаются для матричных элементов T_{fi} матрицы \hat{T} (см. § 24). Для упругого рассеяния π -мезона на нуклоне волновые функции исходного состояния (i) и конечного (f) могут быть взяты в форме, описанной в § 24 (см. (24.14), (24.18)):

$$\Psi_i = \frac{e^{iky_1}}{\sqrt{\omega}} u_p e^{ipx_1}, \quad (30.13)$$

$$\bar{\Psi}_f = \frac{e^{-ik'y_2}}{\sqrt{\omega'}} \bar{u}_{p'} e^{-ip'x_2}, \quad (30.14)$$

где $p = (\mathbf{p}, p_0 = \sqrt{M^2 + \mathbf{p}^2})$ (M — масса нуклона), $k = (\mathbf{k}, k_0 = \omega = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2})$ (m — масса мезона); в конечном состоянии те же величины отмечены штрихами. Спинорные индексы нуклона и индексы изотопического спина мезона, чтобы не загромождать формул, мы не выписываем.

Амплитуда T_{fi} есть матричный элемент четыреххвостки $s(x_2, y_2 | x_1, y_1)$, взятый для состояний (30.13) и (30.14). Вводя координаты $Y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$, $y = y_2 - y_1$ и $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $x = x_2 - x_1$, нетрудно убедиться, что интересующий нас матричный элемент T_{fi} может быть записан в виде

$$T_{fi} = (p', k' | T | p, k) = \frac{2\pi}{\sqrt{4\omega\omega'}} \delta^4(k' + p' - k - p) T_c\left(\frac{k+k'}{2}, p', p\right). \quad (30.15)$$

Специально в лабораторной системе координат для рассеяния вперед (так что $p' = p = (0, 0, 0, M)$ и $k' = k = (\mathbf{k}, \omega)$) имеем

$$T_{fi} = \frac{2\pi}{\sqrt{4\omega\omega'_i}} \delta(k' - k) T_c(k). \quad (30.16)$$

Значком c у функции $T_c(k)$ в (30.15) и (30.16) мы подчеркиваем, что функция $T_c(k)$ является фурье-образом некоторой функции $\tilde{T}_c(x)$, аналогичной по своему пространственно-временному поведению причинной функции $D_c(x)$ *):

$$T_c(k) = \int \tilde{T}_c(x) e^{ikx} d^4x. \quad (30.17)$$

Однако исследование аналитических свойств удобнее проводить на величинах, имеющих свойства запаздывающих или опережающих величин.

Можно показать, что можно ввести запаздывающую функцию $T_{\text{ret}}(k)$, аналогичную запаздывающей функции $D_{\text{ret}}(k)$, которая для реальных частиц, т. е. при $p^2 = M^2$

*) Заметим, что во втором порядке теории возмущений $\tilde{T}_c(x) = D_c(x)$.

и $k^2 = m^2$, на поверхности энергии $p + k = p' + k'$ совпадает с функцией $T_c(k)$:

$$T_c(k) = T_{\text{ret}}(k). \quad (30.18)$$

Наряду с $T_{\text{ret}}(k)$ можно ввести и опережающую функцию $T_{\text{adv}}(k)$, аналогичную $D_{\text{adv}}(k)$, а также их разность

$$T(k) = T_{\text{ret}}(k) - T_{\text{adv}}(k). \quad (30.19)$$

Функции $T_{\text{ret}}(k)$ и $T_{\text{adv}}(k)$ при инверсии вектора k подчиняются некоторым условиям симметрии, именно:

$$T_{\text{ret}}^*(k) = T_{\text{ret}}(-k), \quad (30.20)$$

$$T_{\text{ret}}(k) = T_{\text{adv}}(-k). \quad (30.20')$$

В дальнейшем нам пригодится еще разложение амплитуды $T(k)$ на дисперсионную (эрмитову) часть D и абсорбционную (антиэрмитову) часть iA :

$$T(k) = D(k) + iA(k). \quad (30.21)$$

Для рассеяния вперед без изменения спина нуклона и изотопического спина мезона (т. е. для когерентного рассеяния) в силу эрмитовости матриц D и A величины $D(\omega)$ и $A(\omega)$ действительны.

Заметим еще одну тонкость. В силу законов сохранения вектор k в экспоненте (30.17) содержит иррациональность, которая вносит неудобства. Действительно, в скалярном произведении $kx = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{x}$ абсолютная величина вектора \mathbf{k} зависит иррационально от ω : $|\mathbf{k}| = \sqrt{\omega^2 - m^2} = \lambda$. Поэтому, записывая скалярное произведение kx в виде

$$\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x} = \omega t - e\lambda x, \quad (30.22)$$

где $e = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$, мы освободимся от иррациональности по ω в (30.17), если вместо (30.17) будем рассматривать функции, симметризованные и антисимметризованные по следующей схеме:

$$T_s(e, \lambda) = T(e, \lambda) + T(-e, \lambda), \quad (30.23)$$

$$T_a(e, \lambda) = \frac{1}{\lambda} [T(e, \lambda) - T(-e, \lambda)], \quad (30.23')$$

которые зависят лишь от λ^2 . Из (30.23) и (30.23') следует:

$$T(e, \lambda) = \frac{1}{2} [T_s(e, \lambda) + \lambda T_a(e, \lambda)]. \quad (30.24)$$

Симметризованная по такой схеме абсорбционная часть амплитуды A имеет определенную симметрию относительно изменения знака ω , именно:

$$A_s(-\omega) = + A_s(\omega), \quad (30.25)$$

$$A_a(-\omega) = - A_a(\omega). \quad (30.25')$$

Эти соотношения будут использованы в дальнейшем.

Окончательное исследование аналитических свойств проводится для функций $T_{\text{ret}}(\omega)$ и $T_{\text{adv}}(\omega)$, симметризованных по схеме (30.23) — (30.23').

Весьма сложное и кропотливое исследование приводит к следующему результату: функции $T_{\text{ret}}(\omega)$ и $T_{\text{adv}}(\omega)$ представляют собой одну аналитическую функцию $T(\omega)$ в комплексной плоскости ω , которая в области $\text{Im } \omega > 0$ совпадает с $T_{\text{ret}}(\omega)$, а в области $\text{Im } \omega < 0$ — с $T_{\text{adv}}(\omega)$. $T(\omega)$ имеет разрезы на действительной оси на отрезках $-\infty < \omega < -m$ и $\infty > \omega > m$ и полюсы при

$$\omega = \pm \frac{m^2}{2M} = \pm \omega_g. \quad (30.26)$$

Она исчезает на круге $|\omega| = R \rightarrow \infty$.

На рис. 33 изображена комплексная плоскость ω и жирной линией обведен контур S , внутри которого $T(\omega)$ является аналитической функцией ω .

Если амплитуда $T(\omega)$ все же растет, как ω^n , то вместо нее можно ввести величину

$$T'(\omega) = \frac{T(\omega)}{(\omega - \omega_0)^{n+1}} \quad (30.27)$$

(где ω_0 — произвольная точка), которая будет отличаться от $T(\omega)$ наличием дополнительного полюса в точке $\omega = \omega_0$ и будет стремиться к нулю на окружности $|\omega| \rightarrow \infty$.

К функции $T'(\omega)$ можно применить теорему Коши, выбрав контур интегрирования, как показано на рис. 33;

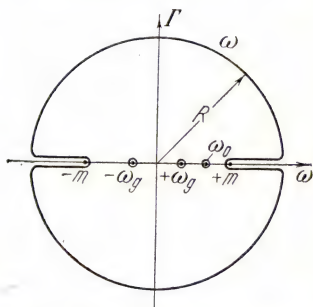


Рис. 33. Контур интегрирования амплитуды $T(\omega)$ на комплексной плоскости ω . На рисунке показаны разрезы от $-R$ до $-m$ и от $+m$ до $+R$ ($R \rightarrow \infty$), а также простые полюсы в точках $\omega = \pm \omega_g$. Полюс $(n+1)$ -го порядка в точке ω_0 вызван делением амплитуды на величину $(\omega - \omega_0)^{n+1}$.

перейдя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получим дисперсионное соотношение для $T'(\omega)$:

$$\frac{T(\omega)}{(\omega - \omega_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\infty + i\varepsilon}^{-\infty + i\varepsilon} \frac{T(\omega') d\omega'}{(\omega' - \omega_0)^{n+1} (\omega' - \omega)} + \\ + \int_{-\infty - i\varepsilon}^{\infty - i\varepsilon} \frac{T(\omega') d\omega'}{(\omega' - \omega_0)^{n+1} (\omega' - \omega)}. \quad (30.28)$$

Обозначим скачок $T(\omega)$ на разрезах $(-\infty, -m)$ и (m, ∞) через $\Delta T(\omega)$ и, умножая (30.28) на $(\omega - \omega_0)^{n+1}$, найдем

$$T(\omega) = \frac{(\omega - \omega_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-m} \frac{\Delta T(\omega')}{(\omega' - \omega_0)^{n+1} (\omega' - \omega)} d\omega' + \\ + \frac{(\omega - \omega_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_m^{\infty} \frac{\Delta T(\omega')}{(\omega' - \omega_0)^{n+1} (\omega' - \omega)} d\omega' + \\ + (-1)^n \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_g + \omega_0} \right)^{n+1} \frac{g^2}{\omega + \omega_g} + \\ + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_g - \omega_0} \right)^{n+1} \frac{g^2}{\omega - \omega_g} + \sum_{r=0}^n c_r \omega^r. \quad (30.29)$$

Здесь g^2 — вычеты $T(\omega)$ в точках $\omega = \pm \omega_g$, а постоянные коэффициенты c_r определяются вычетами в точке $\omega = \omega_0$.

Далее, скачок $\Delta T(\omega)$ на разрезах функции $T(\omega)$ определяется из того соображения, что абсорбционная часть A , которая отлична от нуля при $\omega < -m$ и $\omega > +m$, меняет свой знак при переходе от $\text{Im } \omega > 0$ к $\text{Im } \omega < 0$, в то время как дисперсионная часть амплитуды $D(\omega)$ изменяется непрерывно. Поэтому скачок $\Delta T(\omega)$ равен

$$\Delta T(\omega) = 2iA(\omega). \quad (30.30)$$

Теперь можно воспользоваться симметрией (30.25), (30.25') и заменить интегрирование по отрицательным ω интегрированием по положительным ω .

Выбор показателя n остается произвольным, а его наименьшее допустимое значение должно быть установ-

лено из косвенных соображений. Согласно оптической теореме (XII.4)

$$A(\omega) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{\text{полн}}(\omega), \quad (30.31)$$

где k — импульс мезона в системе центра масс, а $\sigma_{\text{полн}}(\omega)$ — полное сечение процесса $\pi + N \rightarrow N + \dots$

Для того чтобы получить теперь из (30.29) конкретные дисперсионные соотношения для рассеяния нейтральных π^0 - и заряженных π^\pm -мезонов, необходимо восстановить зависимость амплитуды рассеяния от спиновых и изотопических индексов.

Эта сторона не представляет уже интереса для темы нашей монографии, и мы ограничимся приведением окончательного результата. Обозначим дисперсионные и абсорбционные части амплитуды рассеяния через D_0 , D_\pm , A_0 , A_\pm для нейтральных (индекс 0) и для заряженных (индекс \pm) мезонов соответственно. Тогда дисперсионные соотношения запишутся в следующем виде:

$$D_0(\omega) - D_0(\omega_0) = \frac{g^2}{M} \omega_g^2 \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_g^2)(\omega_0^2 - \omega_g^2)} + \\ + \frac{2}{\pi} (\omega^2 - \omega_0^2) \oint_m^\infty \frac{\omega' A_0(\omega') d\omega'}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_0^2)}, \quad (30.32)$$

$$D_1(\omega) - D_1(\omega_0) = \frac{2g^2}{M} \frac{\omega_g^2 (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_g^2)(\omega_0^2 - \omega_g^2)} + \\ + \frac{2}{\pi} (\omega^2 - \omega_0^2) \oint_m^\infty \frac{\omega' A_1(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_0^2)} d\omega', \quad (30.32')$$

$$D_2(\omega) - \frac{\omega}{\omega_0} D_2(\omega_0) = \frac{2g^2}{M} \frac{\omega \omega_g^2 (\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_g^2)(\omega_0^2 - \omega_g^2)} + \\ + \frac{2}{\pi} \omega (\omega^2 - \omega_0^2) \oint_m^\infty \frac{A_2(\omega')}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_0^2)} d\omega', \quad (30.32'')$$

где

$$D_1(\omega) = D_+(\omega) + D_-(\omega), \quad (30.33)$$

$$D_2(\omega) = D_+(\omega) - D_-(\omega), \quad (30.33')$$

$$A_1(\omega) = A_+(\omega) + A_-(\omega), \quad (30.33'')$$

$$A_2(\omega) = A_+(\omega) - A_-(\omega), \quad (30.33''')$$

а две произвольные константы c_0 и c_1 в многочлене $\sum_0^n c_r \omega^r$ исключены вычитанием из дисперсионных соотношений амплитуд $D(\omega_0)$ и $\frac{\omega}{\omega_0} D(\omega_0)$, взятых в определенной точке $\omega = \omega_0$.

Абсорбционные части $A_{\pm}(\omega)$, $A_0(\omega)$ могут быть выражены с помощью оптической теоремы (30.31) через наблюдаемые на опыте полные сечения; наконец, константа g определена из взаимодействия при низких энергиях.

Таким образом, дисперсионные соотношения (30.32) — (30.32'') могут быть проверены на опыте, и тем самым может быть установлена справедливость локальной теории поля или, напротив, показана ее несостоятельность.

Другой важный вывод из локальной теории, основанный также на аналитических свойствах амплитуды рассеяния, относится к асимптотическому поведению полного сечения для частиц и античастиц.

В работе [62] на основании дисперсионных соотношений для упругого рассеяния вперед π -мезонов на нуклонах и с помощью оптической теоремы (см. § 23) было показано, что полные сечения взаимодействия π^+ - и π^- -мезонов на нуклонах при предельно больших энергиях ($\omega \rightarrow \infty$) должны быть равны между собой:

$$\sigma_{\pi^+N} = \sigma_{\pi^-N} \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (30.34)$$

В последнее время для установления асимптотических соотношений между сечениями различных процессов привлекается теорема о поведении аналитической функции $f(z)$ внутри угла, образованного лучами, в зависимости от тех пределов C_1 и C_2 , к которым она стремится вдоль этих лучей [63]. Эта теорема утверждает, что если бы функция $f(z)$, аналитическая внутри угла C_1OC_2 имела различные пределы, $C_1 \neq C_2$, вдоль лучей OC_1 и OC_2 , то она росла бы внутри угла не медленнее экспоненты.

Обращаясь к нашей задаче, будем рассматривать плоскость z как комплексную плоскость энергии ω мезона: $z = \omega$; если взять теперь в качестве угла C_1OC_2

угол π (верхнюю полуплоскость), а под функцией $f(z)$ подразумевать амплитуду упругого рассеяния частицы a на частице b , продолженную в верхнюю полуплоскость, то при $z = \omega \rightarrow \infty$ функция $f(z)$ будет совпадать с амплитудой $T(\omega)$ упругого рассеяния вперед для процесса

$$a + b \rightarrow a + b; \quad (30.35)$$

при $\omega \rightarrow \infty$ и $z = \omega \rightarrow -\infty$ эта же функция будет совпадать с той же амплитудой $T(\omega)$ для «перекрестного» процесса *):

$$\tilde{a} + b \rightarrow \tilde{a} + b, \quad (30.35')$$

где \tilde{a} означает античастицу по отношению к частице a .

В силу доказанной ранее аналитичности амплитуды упругого рассеяния в верхней полуплоскости и характерного для локальной теории предположения об ограничении роста амплитуды полиномиальным ростом ($\sim \omega^n$), на основании изложенной выше теоремы предельные значения C_1 и C_2 амплитуды $f(z)$, т. е. ее значения при $\omega = \pm \infty$, должны быть равны. Из-за равенства мнимых частей амплитуды на основании оптической теоремы должны быть равны и полные сечения. В частности, считая частицу a π -мезоном, а частицу b — нуклоном, мы придем к равенству (30.34).

На основании этой же теоремы асимптотические соотношения были установлены не только для полных сечений πN -рассеяния, но и для многих других реакций, и не только для полных, но и для дифференциальных сечений [64].

Приведем некоторые из этих соотношений.

а) Для полных сечений при $\omega \rightarrow \infty$ одинаковы сечения следующих реакций:

$$\left. \begin{array}{ll} \pi^+ + p \rightarrow \dots & \text{и} \quad \pi^- + p \rightarrow \dots, \\ K^+ + p \rightarrow \dots & \text{и} \quad K^- + p \rightarrow \dots, \\ p + p \rightarrow \dots & \text{и} \quad \tilde{p} + p \rightarrow \dots, \\ \Sigma^+ + p \rightarrow \dots & \text{и} \quad \Sigma^- + p \rightarrow \dots, \end{array} \right\} \quad (30.36)$$

где точками справа обозначены все возможные продукты реакций, указанных слева.

*) О «перекрестных» реакциях см. подробнее § 31.

б) Для дифференциальных сечений при $\omega \rightarrow \infty$ и при заданной передаче импульса одинаковы сечения:

$$\left. \begin{array}{ll} \pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p & \text{и} \quad \pi^- + p \rightarrow \pi^- + p, \\ K^+ + p \rightarrow K^+ + p & \text{и} \quad K^- + p \rightarrow K^- + p, \\ \pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+ & \text{и} \quad K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+, \\ \pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda & \text{и} \quad K^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Lambda. \end{array} \right\} \quad (30.37)$$

В заключение этого раздела приведем основные принципы локальной теории поля, которые использованы при выводе дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния T и асимптотических соотношений для сечений σ .

I. Соблюдение микропричинности, которое означает отсутствие влияния из одной области пространства—времени $\mathcal{R}'_4(x)$ в другую $\mathcal{R}''_4(x)$, если точки, принадлежащие этим областям, разделены пространственно-подобным интервалом

$$x_2 \sim x_1, \quad x_1 \in \mathcal{R}'_4(x), \quad x_2 \in \mathcal{R}''_4(x),$$

и если интервал времениподобный, т. е. $x^2 > 0$, но $x_2 < x_1$ (следствие должно наступать позднее причины!).

II. Существование спектра стабильных частиц с положительной энергией:

$$p_0 = \sqrt{p^2 + m_s^2}, \quad (30.38)$$

где m_s —масса частиц ($s=1, 2, \dots$).

III. Амплитуда $T(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ растет не быстрее, чем полином:

$$|T(\omega)| < \alpha |\omega|^n, \quad (30.39)$$

где n —целое положительное число.

§ 31. Формальная теория \hat{S} -матрицы

Прежде чем обратиться к основному предмету этой главы, мы напомним некоторые важнейшие свойства \hat{S} -матрицы.

Как было показано в § 28, \hat{S} -матрица есть унитарная матрица, преобразующая начальное состояние свободных частиц Ψ_i , данное при $t = -\infty$, в конечное состояние свободных частиц Ψ_f , рассматриваемое при $t = +\infty$:

$$\Psi_f = \hat{S}\Psi_i. \quad (31.1)$$

Эту матрицу обычно представляют в виде (см. (29.4))

$$\hat{S} = \hat{I} + i\hat{T}. \quad (31.2)$$

Условие унитарности

$$\hat{S}\hat{S}^+ = \hat{I} \quad (31.3)$$

может быть превращено в тождество, если положить

$$\hat{S} = e^{i\hat{\eta}}, \quad (31.4)$$

где $\hat{\eta}$ — эрмитов оператор:

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}^+, \quad (31.5)$$

или путем другой подстановки:

$$\hat{S} = \frac{\hat{I} - i\hat{K}}{\hat{I} + i\hat{K}}, \quad (31.6)$$

где \hat{K} — опять-таки эрмитов оператор:

$$\hat{K} = \hat{K}^+. \quad (31.7)$$

Понятие асимптотических состояний Ψ_i и Ψ_f нуждается в обстоятельном исследовании. В частности, пре-

дел $t \rightarrow \pm\infty$ мы рассматриваем пока чисто формально, не указывая, в каком смысле следует понимать этот предел.

К этим вопросам мы вернемся позднее. Асимптотические состояния по самому своему смыслу определяются полным набором динамических переменных p , характеризующих состояния свободных частиц. В качестве этого набора переменных мы выберем импульсы этих частиц, так что

$$\Psi_i \equiv \Psi_i(p), \quad (31.8)$$

$$\Psi_f \equiv \Psi_f(p'), \quad (31.8')$$

где (p) — совокупность импульсов в начальном состоянии, а (p') — совокупность импульсов в конечном состоянии: $(p) \equiv (p_n, p_{n-1}, \dots, p_1)$, если в начальном состоянии имеется n частиц, и $(p') \equiv (p_{m+n}, p_{m+n-1}, \dots, p_{n+1})$, если в конечном состоянии имеется m частиц. Для свободных частиц четвертые компоненты импульсов имеют определенное значение:

$$p_{0s} = +\sqrt{p_s^2 + m_s^2}, \quad s = 1, 2, \dots, m+n, \quad (31.9)$$

где m_s — масса s -й частицы. Совокупность значений переменных $p = (p_0, \mathbf{p})$ образует трехмерное многообразие $\mathfrak{H}_3(p)$, совпадающее с поверхностью однополостного гиперболоида

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 \equiv m^2, \quad p_0 > 0. \quad (31.10)$$

Это многообразие является пространством Лобачевского*), скалярная кривизна которого R (ср. (5.13)) определяется массой частиц и равна

$$R = -\frac{1}{m^2}. \quad (31.11)$$

Заметим, что вторая полость гиперболоида

$$p_0 = -\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} \quad (31.10')$$

может быть использована для изображения состояния античастиц.

*) Это обстоятельство было последовательно использовано в работе [65]; см. также [66].

Таким образом, пространство, в котором определены асимптотические состояния i и f , является композицией нескольких пространств Лобачевского:

$$\mathfrak{H}_i(p) = \mathfrak{H}_3(p_1) \otimes \mathfrak{H}_3(p_2) \otimes \dots \otimes \mathfrak{H}_3(p_n). \quad (31.11')$$

Так же построено и пространство $\mathfrak{H}_f(p')$:

$$\mathfrak{H}_f(p') = \mathfrak{H}_3(p'_{n+1}) \otimes \mathfrak{H}_3(p'_{n+2}) \otimes \dots \otimes \mathfrak{H}_3(p'_{n+m}). \quad (31.11'')$$

Пространство $\mathfrak{H}_i(p)$ мы будем называть *пространством начальных состояний*, пространство $\mathfrak{H}_f(p')$ — *пространством конечных состояний*. Оба пространства будем называть *пространствами асимптотических состояний*.

Заметим, что пространство $\mathfrak{H}(p)$ по своему смыслу совпадает с множеством собственных значений оператора импульса \hat{p} свободных частиц и оператора энергии \hat{p}_0 ; каждому собственному значению оператора \hat{p} и определенному знаку оператора \hat{p}_0 может быть сопоставлена собственная функция $\psi_p^\pm(x)$ этих операторов. Поэтому точкам пространства может быть однозначно сопоставлена совокупность всех собственных функций $\psi_p^\pm(x)$ операторов \hat{p} и \hat{p}_0 . Эта совокупность образует пространство Гильберта $\mathfrak{H}\{\psi\}$. В этом пространстве функции $\psi_p^\pm(x)$ и их произведения являются векторами и тензорами, образующими полную систему ортонормированных функций.

В избранном нами представлении асимптотических состояний Ψ_f и Ψ_i строки матрицы \hat{S} характеризуются импульсами (p') в конечном состоянии f , а столбцы — импульсами (p) в начальном состоянии i . Поэтому мы можем написать:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle p' | \hat{S} | p \rangle \equiv \\ &\equiv \langle p'_{m+n}, p'_{m+n-1}, \dots, p_{n+1} | \hat{S} | p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1 \rangle. \end{aligned} \quad (31.12)$$

Для дальнейшего удобно выделить, в соответствии с (31.3), из \hat{S} -матрицы единицу \hat{I} . Тогда (31.12) перепишется в виде

$$S_{fi} = \langle p' | \hat{I} | p \rangle + i \langle p' | \hat{T} | p \rangle, \quad (31.13)$$

где

$$\begin{aligned} \langle p' | \hat{T} | p \rangle = \\ = \langle p'_{m+n}, p'_{m+n-1}, \dots, p'_{n+1} | \hat{T} | p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1 \rangle, \end{aligned} \quad (31.14)$$

S -матрица должна быть релятивистским инвариантом (ср. § 29). Пусть при преобразовании Лоренца импульсы (p) преобразуются с помощью матрицы лоренцева преобразования *)

$$\bar{p} = \bar{L}p, \quad (31.15)$$

где под (\bar{p}) понимается совокупность новых преобразованных импульсов. При этом векторы состояний $\Psi(p)$ подвергаются унитарному преобразованию с помощью некоторой унитарной матрицы \bar{U}_L :

$$\bar{\Psi}(\bar{p}) = \bar{U}_L \Psi(\bar{L}^{-1}\bar{p}) = \bar{U}_L \Psi(p), \quad (31.16)$$

где временно через Ψ обозначен вектор состояния в новой системе координат. Применяя это преобразование к равенству (31.1), получим

$$\bar{U}_L \Psi_f(\bar{L}^{-1}\bar{p}) = \bar{U}_L \hat{S}(\bar{L}^{-1}\bar{p}) \bar{U}_L^{-1} \bar{U}_L \Psi_i(\bar{L}^{-1}\bar{p}), \quad (31.17)$$

т. е.

$$\bar{\Psi}_f = \bar{\hat{S}}(\bar{p}) \bar{\Psi}_i, \quad (31.18)$$

где

$$\bar{\hat{S}}(\bar{p}) = \bar{U}_L \hat{S}(\bar{L}^{-1}\bar{p}) \bar{U}_L^{-1}. \quad (31.19)$$

Релятивистская инвариантность требует, чтобы закон преобразования был один и тот же во всех системах отсчета, поэтому должно иметь место соотношение

$$\hat{S}(\bar{L}^{-1}\bar{p}) = \hat{S}(\bar{p}). \quad (31.20)$$

Это и есть условие релятивистской инвариантности теории, выраженное на языке импульсных переменных.

В отсутствие внешних полей физическое явление в силу однородности пространства—времени не может

*) Матрица \bar{L} отлична от матрицы L в (29.25).

зависеть от начала отсчета времени и от положения начала координат. Поэтому матрица рассеяния \hat{S} должна быть трансляционно инвариантна. Из этого требования вытекает условие

$$\hat{D}\hat{S}-\hat{S}\hat{D}=0, \quad (31.21)$$

где \hat{D} —оператор трансляции. Этот оператор имеет вид

$$\hat{D}=\exp(i\hat{P}_\mu a_\mu), \quad (31.22)$$

где оператор \hat{P}_μ есть оператор полного импульса рассматриваемой физической системы, а a_μ —вектор произвольного смещения. Из (31.21) и (31.22) следует, что

$$\hat{P}_\mu\hat{S}-\hat{S}\hat{P}_\mu=0, \quad (31.23)$$

т. е. матрица \hat{S} коммутирует с оператором полного импульса \hat{P} . Поэтому \hat{S} -матрица должна быть диагональной относительно оператора полного импульса \hat{P} . В силу этого матричные элементы S_{fi} должны быть пропорциональны δ -функции от полного четырехмерного импульса, т. е. пропорциональны функции

$$\delta^4(P'-P),$$

где $P'=\sum p' \equiv \sum_{s=1}^m p_{n+s}$ и $P=\sum p \equiv \sum_{s=1}^n p_s$.

Заметим, что матричный элемент от \hat{I} равен

$$\langle p' | \hat{I} | p \rangle \equiv \delta^3(p'-p) \equiv \prod_{s=1}^n \delta^3(p'_s - p_s),$$

т. е. произведению трехмерных δ -функций. Для $n \geq 2$ из этого произведения всегда можно выделить четырехмерную δ -функцию от полного импульса, так что

$$\langle p' | \hat{I} | p \rangle \delta^3(p'-p) = \delta^4(\sum p' - \sum p) I(p' | p); \quad (31.24)$$

здесь $I(p' | p)$ выражен через относительные импульсы. Элемент матрицы $\langle p' | \hat{T} | p \rangle$ также должен быть пропорционален $\delta^4(\sum p' - \sum p)$, т. е.

$$\langle p' | \hat{T} | p \rangle = \delta^4(\sum p' - \sum p) T(p' | p). \quad (31.25)$$

Дальнейшая детализация вида матричных элементов может быть сделана на основе того соображения, что закон перемножения любых двух матриц A и B , взятых в импульсном представлении, в релятивистски инвариантной теории должен быть релятивистски инвариантен. Мы имеем

$$\langle p' | \hat{A}\hat{B} | p \rangle = \int \langle p' | \hat{A} | p'' \rangle d^3 p'' \langle p'' | \hat{B} | p \rangle. \quad (31.26)$$

Однако элемент объема $d^3 p''$ не является инвариантом. Мы обеспечим релятивистски инвариантный характер умножения матриц, если представим матричные элементы матриц в виде

$$\langle p' | \hat{A} | p \rangle = \frac{A(p', p)}{V_{2p'_0} \dots V_{2p_0}}, \quad (31.27)$$

где p_0 есть четвертая компонента импульса, а $A(p', p)$ есть инвариантная функция импульсов (p') и (p) . Действительно, в этом случае вместо (31.26) получим

$$\begin{aligned} \langle p' | \hat{A}\hat{B} | p \rangle &= \\ &= \frac{AB}{V_{2p'_0} \dots V_{2p_0}} = \int \frac{A(p', p'')}{V_{2p'_0}} \frac{d^3 p''}{2p''_0} \frac{B(p'', p)}{V_{2p_0}}. \end{aligned} \quad (31.26')$$

Возникший здесь элемент объема $\frac{d^3 p''}{2p''_0}$ есть элемент объема в пространстве Лобачевского, который является релятивистским инвариантом.

Окончательно матричные элементы \hat{S} -матрицы запишутся в виде

$$\begin{aligned} S_{fi} &\equiv \langle p' | \hat{S} | p \rangle = \\ &= \langle p' | \hat{I} | p \rangle + i\delta^4 \left(\sum p' - \sum p \right) \frac{T(p' | p)}{V_{2p'_0} \dots V_{2p_0}}, \end{aligned} \quad (31.28)$$

где $T(p' | p)$ есть инвариантная функция импульсов начального и конечного состояний.

Рассмотрим теперь подробнее структуру матрицы \hat{S} в простейшем случае одного сорта скалярных незаряженных частиц, имеющих массу покоя m . Мы предположим, что взаимодействие между ними таково, что оно не приводит к образованию ни стабильных комплексов

с массой M , меньшей суммы масс исходных частиц, ни неустойчивых комплексов с массой M^* , большей суммы масс исходных частиц. Возможные процессы в этом простейшем случае ограничиваются рассеянием, рождением и поглощением частиц. В этом случае имеется лишь один сорт скалярных частиц, способных рассеиваться, рождаться и поглощаться. В табл. 1 для краткости строки

Таблица 1

Матрица рассеяния для простейшего случая скалярных частиц

$f \backslash i$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1,1							
2		2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8
3		3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8
4		4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8
5		5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8
6		6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8
7		7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8
8		8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8

матрицы (f) нумерованы числом частиц m , возникающих в конечном состоянии, а ее столбцы (i) нумерованы числом частиц в начальном состоянии n . В каждой клетке (m, n) записан матричный элемент $\langle m | \hat{S} | n \rangle$, определенный в асимптотическом пространстве $\mathfrak{H}(p, p') = \mathfrak{H}_i(p) \otimes \mathfrak{H}_f(p')$, имеющем $3(m+n)$ измерений. Элемент (1, 1) есть единица; диагональные элементы (2, 2), (3, 3), ..., (m, m) описывают упругое рассеяние частиц (мы определим упругое рассеяние как такое рассеяние, в котором не рождается новых частиц, частицы не поглощаются и не меняют своего внутреннего состояния). Элементы с $m \neq n$ описывают переходы, сопровождающиеся рождением или поглощением частиц. Пустые клетки означают матричные элементы, равные нулю. Заметим, что все элементы, находящиеся на диагонали $m+n = \text{const}$, описываются функциями $T(p', p)$ (31.28) с одним и тем же числом переменных $3(m+n)$. Это обстоя-

тельство позволяет, по крайней мере в некоторых теоретических схемах, рассматривать все функции

$$\langle m | \hat{T} | n \rangle = T(p'_1, p'_2, \dots, p'_m; p_1, p_2, \dots, p_n)$$

как одну функцию

$$T(p) \equiv T(p_1, p_2, \dots, p_m; p_{m+1}, \dots, p_{m+n}), \quad (31.29)$$

в которой не различаются начальные и конечные состояния. Такого рода симметрия начальных и конечных

состояний носит название *перекрестной симметрии*. В общем случае для реакции, в которой в начальном состоянии (*i*) имелись частицы *a, b, c, d, ...* (всего *n*), а в конечном состоянии (*f*) — частицы *x, y, z, u, ...* (всего *m*),

$$a + b + c + d + \dots \rightarrow x + y + z + u + \dots \quad (31.30)$$

функция $T(p)$ (31.29) будет той же, что и для реакции

$$a + b + c + \dots + \bar{x} + \bar{z} + \dots \rightarrow \bar{d} + \bar{e} + \dots + u + \dots, \quad (31.30')$$

где любое число частиц перенесено слева направо и, наоборот, справа налево, но с заменой частиц на античастицы (знак \sim).

Рис. 34 поясняет на частном примере эту ситуацию. Наличие перекрестной симметрии позволяет рассматривать

Рис. 34. Иллюстрация к перекрестной симметрии. На рис. а) 1, 2, 3 — частицы в начальном состоянии, а частицы 1', 2', 3', 4' — в конечном состоянии. На рис. б) частица 3 причислена к числу частиц конечного состояния, но уже в роли античастицы $\bar{3}$. Узел *s* один и тот же на обеих диаграммах.

совокупность пространств $\mathfrak{R}_i(p)$ и $\mathfrak{R}_f(p')$ как одно пространство:

$$\mathfrak{R}(p) = \mathfrak{R}_i(p) \otimes \mathfrak{R}_f(p'). \quad (31.31)$$

Обратимся теперь к случаю, когда помимо «исходных» частиц с массой *m* имеется еще и стабильная

частица с массой $m < M < 2m$. Такую частицу можно рассматривать как результат слияния двух частиц с массой m , сопровождающегося дефектом массы $\Delta = 2m - M > 0$. Существование этой частицы должно быть учтено в асимптотических состояниях тем, что соответствующее пространство Лобачевского будет иметь кривизну (см. (31.11)) $R = -1/M^2$.

Таблица 2

Матрица рассеяния для случаев двух сортов скалярных частиц — частиц с массой m и частиц с массой M , причем $m < M < 2m$. Нумерация строк и столбцов матрицы идет в порядке возрастания массы покоя

$f \backslash i$	1	M	2	$M+1$	3	$2M$	4	$2M+1$
1	1, 1							
M		M, M						
2			2, 2	2, $M+1$	2, 3	2, $2M$	2, 4	2, $2M+1$
$M+1$				$M+1, M+1$	$M+1, 3$	$M+1, 2M$	$M+1, 4$	$M+1, 2M+1$
3			3, 2	3, $M+1$	3, 3	3, $2M$	3, 4	3, $2M+1$
$2M$			$2M, 2$	$2M, M+1$	$2M, 3$	$2M, 2M$	$2M, 4$	$2M, 2M+1$
4			4, 2	4, $M+1$	4, 3	4, $2M$	4, 4	4, $2M+1$
$2M+1$			$2M+1, 2$	$2M+1, M+1$	$2M+1, 3$	$2M+1, 2M$	$2M+1, 4$	$2M+1, 2M+1$

В табл. 2 изображена структура матрицы рассеяния в этом случае. Нумерация строк и столбцов по-прежнему установлена в порядке возрастания суммарной массы покоя частиц, участвующих в конечном и начальном состояниях. Во избежание громоздкости обозначений масса легкой частицы m принята за 1. Существование взаимных превращений частиц усложняет матрицу. Кроме единичного матричного элемента (1, 1) имеется еще один-единственный элемент (M, M), который изображает движение частицы M по инерции. Элементы ($M, 2$) и ($2, M$) равны нулю, так как в силу предположения $m < M < 2m$ частица M не может распадаться на две

частицы m , равным образом невозможен и процесс слияния двух частиц m в одну M -частицу. Однако такие процессы уже с участием трех частиц возможны, так как третья частица может унести избыток энергии, возникающий при слиянии двух m -частиц в одну M -частицу. Поэтому матричные элементы $(M+1, 3)$ и $(3, M+1)$, вообще говоря, не равны нулю. Среди матричных элементов есть и такие, которые описывают процессы исключительно между M -частицами (например, элемент $(2M, 2M)$ описывает упругое рассеяние M -частиц, элемент $(3M, 2M)$ — рождение M -частицы при столкновении двух M -частиц и т. п.).

Обратимся теперь к случаю, когда M -частица имеет массу, большую $2m$, т. е. $M > 2m$. Теперь мыслимы две возможности: а) частица M стабильна, тогда процессы $M \rightleftharpoons 2m$ запрещены; б) частица M нестабильна, в этом случае процессы $M \rightleftharpoons 2m$ возможны. В табл. 3 приведена матрица рассеяния для случая стабильных M - и

Таблица 3

Структура матрицы рассеяния для случая двух скалярных частиц с массой m и массой M , причем $2m < M < 3m$, однако частица M предполагается стабильной

$i \backslash f$	1	2	M	3	$M+1$	4	$M+2$	$2M$
1	1, 1							
2		2, 2		2, 3	2, $M+1$	2, 4	2, $M+2$	2, $2M$
M			MM					
3		3, 2		3, 3	3, $M+1$	3, 4	3, $M+2$	3, $2M$
$M+1$		$M+1, 2$		$M+1, 3$	$M+1, M+1$	$M+1, 4$	$M+1, M+2$	$M+1, 2M$
4		4, 2		4, 3	4, $M+1$	4, 4	4, $M+2$	4, $2M$
$M+2$		$M+2, 2$		$M+2, 3$	$M+2, M+1$	$M+2, 4$	$M+2, M+2$	$M+2, 2M$
$2M$		$2M, 2$		$2M, 3$	$2M, M+1$	$2M, 4$	$2M, M+2$	$2M, 2M$

m -частиц, способных, однако, при взаимодействии рождаться, поглощаться и рассеиваться. В отличие от матрицы, приведенной в табл. 2, в рассматриваемом случае столбец и строка, содержащая M -частицу, стоят после столбца и строки с двумя m -частицами. Для опре-

деленности предположено, что $2m < M < 3m$, поэтому третий столбец и третья строка следуют за столбцом M и строкой M соответственно.

Матричные элементы $(M, 2)$ и $(2, M)$ равны нулю в силу предположенной стабильности M -частицы; это некоторый специальный запрет. Процессы $M + m \rightleftharpoons 2m$ не предполагаются запрещенными; в частности, процесс $2m \rightarrow M + m$ можно рассматривать как неупругий удар, сопровождающийся поглощением одной легкой частицы m и рождением тяжелой M -частицы. Процессы $3m \rightleftharpoons M$ запрещены условием $M < 3m$, поэтому соответствующие матричные элементы $(3, M)$, $(M, 3)$ равны нулю.

В настоящее время известно очень большое число нестабильных частиц. Поэтому случай, когда M -частица является нестабильной, представляется крайне важным. Однако обсуждение этого случая невозможно без обращения к пространственно-временному описанию явлений. Поэтому мы отложим на время обсуждение случая б) и обратимся к некоторым тонкостям, связанным с проблемой пространственно-временного описания явлений с помощью матрицы рассеяния.

§ 32. Пространственно-временное описание с помощью \hat{S} -матрицы

По самому своему определению \hat{S} -матрица трансформирует исходное состояние Ψ_i , заданное при $t_1 = -\infty$, в конечное состояние Ψ_f , которое изучается при $t_2 = +\infty$. В § 28 было показано (см. (28.18)), что \hat{S} -матрица является пределом унитарного оператора $\hat{U}\{\sigma_2, \sigma_1\}$, трансформирующего состояние $\Psi_i\{\sigma_1\}$, заданное на пространственно-подобной поверхности σ_1 , в состояние $\Psi_f\{\sigma_2\}$ на поверхности σ_2 . В случае плоских пространственных поверхностей эти поверхности вырождаются в плоскости $\sigma_2 = t_2$, $\sigma_1 = t_1$, так что

$$\hat{S} = \lim_{\substack{t_1 \rightarrow -\infty \\ t_2 \rightarrow +\infty}} \hat{U}(t_2, t_1). \quad (32.1)$$

Мы должны теперь уточнить смысл, в котором следует понимать пределы $t_1 \rightarrow -\infty$, $t_2 \rightarrow +\infty$. Рассмотрим

простейший случай, когда в начальном состоянии имеются только две частицы А и В. Будем считать, что начальное состояние задано при $t = t_1$ и описывается волновыми пакетами u_A и u_B соответственно. Тогда

$$\Psi_i(t_1) = u_A(t_1) u_B(t_1). \quad (32.2)$$

Можно допустить, что эти пакеты образовались в результате прохождения диафрагм А и В, которые были открыты на некоторое время вблизи момента времени $t_1 = -T$. Предположим, что начальные размеры пакетов суть $a_\perp = a_\parallel = a$ (a_\perp есть размер пакета в направлении, перпендикулярном, а a_\parallel — в направлении, параллельном направлению движения). Расстояние между пакетами при $t_1 = -T$ пусть будет $R \gg a$. Мы будем считать, что эти пакеты имеют достаточно определенный средний импульс $p_A \gg \Delta p \approx \hbar/a$, $p_B \gg \Delta p \approx \hbar/a$; соответствующая средняя скорость пакетов будет $v_A = \partial E_A / \partial p_A$ и $v_B = \partial E_B / \partial p_B$, где $E_A = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_A^2}$, $E_B = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_B^2}$ — их средние энергии. В системе центра масс относительная скорость пакетов будет $v = v_A - v_B$, а $E_A = E_B$; в дальнейшем мы будем опускать индексы А и В, поскольку существенно лишь относительное движение пакетов. Если радиус взаимодействия частиц есть b^*), то при $b \gg a$ пакеты u_A и u_B придут во взаимодействие через время $T \sim R/v$. В этом случае частицы можно считать асимптотически свободными в течение времени

$$T = \frac{R}{v} \gg \frac{b}{v}, \quad (32.3)$$

начиная с $t = t_1$. В случае, когда $b < a$, следует иметь в виду, что величина a определяет точность, с которой может быть определена локализация частицы; поэтому при $b < a$ вместо (32.3) будем иметь условие

$$T = \frac{R}{v} \gg \frac{a}{v}. \quad (32.3')$$

Так как $a \gg \hbar/p \equiv \lambda$ (λ — характерная для пакетов длина волны), то в обоих случаях в асимптотической области $R \gg \lambda$.

*) Как известно, радиус взаимодействия b не всегда определим. В частности, в случае кулоновского взаимодействия он бесконечен. Мы сейчас исключаем из рассмотрения этот случай.

После взаимодействия при $t_2 = +T$ волновая функция конечного состояния $\Psi_f(t_2)$ запишется в виде

$$\Psi_f(t_2) = u_A(t_2) u_B(t_2) + u(t_2), \quad (32.4)$$

где функция $u_A(t_2) u_B(t_2)$ описывает первоначальные пакеты в момент t_2 , а функция $u(t_2)$ — асимптотическую рассеянную волну. Рассеянная волна u при больших расстояниях r между рассеянными частицами имеет вид *)

$$u(r) = C \frac{e^{ikr}}{r} + D \frac{e^{ikr}}{r^2} + \dots, \quad (32.5)$$

где $k = 1/\lambda$, а C, D, \dots — не зависящие от r коэффициенты. Асимптотическое выражение для этой волны при $t_2 = T = R/v$ есть

$$u(R) = C \frac{e^{ikR}}{R} \quad (32.6)$$

и предполагает расстояние $r = R$ настолько большим по сравнению с λ , что в (32.5) можно пренебречь вторым членом (De^{ikR}/R^2) и всеми остальными. Следовательно, асимптотическая область совпадает с той областью, которую принято называть *волновой зоной* ($R \gg \lambda$).

В переводе на «язык времени» пренебрежение членами порядка $1/R^2$ означает, что при переходе к пределу $t_2 = T \rightarrow +\infty$ члены порядка $1/T$ удерживаются, а члены порядка $1/T^2$ уже считаются исчезающе малыми.

Заметим, что существует и верхний предел для T , если мы хотим сохранить пространственно-временное описание для процесса столкновения. Действительно, описание с помощью волновых пакетов предполагает, что первоначальный пакет (заданный при $t_1 = -T$) не слишком расплывается к моменту столкновения частиц, в противном случае момент столкновения становится совершенно неопределенным.

Согласно теории релятивистского волнового пакета, пакет, имевший в начальный момент времени ширину Δ ,

*) В общем случае рассеянная волна описывает также вновь рожденные при столкновении частицы. Простоты ради мы ограничимся сейчас упругим столкновением.

с течением времени расплывается таким образом, что продольная ширина $\Delta_{\parallel}(t)$ будет равна (см. (18.10) и (18.10'))

$$\Delta_{\parallel} = \sqrt{a^2 + \frac{\lambda^2}{a^2} \frac{m^4}{E^4} v^2 t^2} \quad (32.7)$$

и поперечная $\Delta_{\perp}(t)$ —

$$\Delta_{\perp} = \sqrt{a^2 + \frac{\lambda^2}{a^2} v^2 t^2}. \quad (32.7')$$

Ввиду наличия в (32.7) множителя $(m/E)^4$ равенство (32.7') является более критичным, нежели (32.7). Ограничение расплывания пакета в течение процесса соударения означает, что Δ_{\perp} при $t = 2T$ не сильно отличается

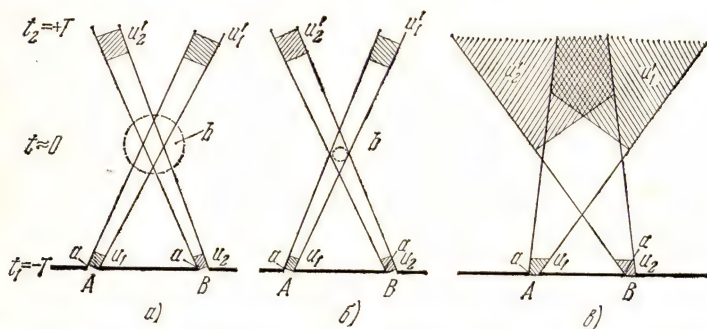


Рис. 35. Здесь изображены волновые пакеты u_1 и u_2 , выходящие из диафрагм A и B поглощающего экрана в момент времени $t_1 = -T$. Около $t = 0$ происходит столкновение; u'_1 и u'_2 — те же пакеты (частично рассеянные) при $t_2 = +T$. b — радиус взаимодействия, a — ширина щели в экране, $R = AB = vT$ — асимптотическое расстояние между пакетами. На рис. 35, a рассмотрен случай $b \gg a$, $R > b$; на рис. 35, b — $b \ll a$, $R \gg a$, и наконец, на рис. 35, v показан случай чрезмерно сильного расплывания пакетов, когда всякая информация о причинности теряется.

от Δ_{\perp} при $t = 0$. Следовательно, должно быть $a^4 \gg \lambda^2 v^2 T^2 = \lambda^2 R^2$. Объединяя теперь это неравенство с неравенствами (32.3) и (32.3'), получаем

$$\frac{a^2}{\lambda} \gg R \gg (b \text{ или } a) \gg \lambda. \quad (32.8)$$

На рис. 35, a показаны следы, образованные пакетами, выходящими из диафрагм A и B . Этот рисунок иллюст-

рирует случай, когда радиус взаимодействия частиц больше размера пакета a . Рис. 35, б относится к случаю, когда $b \ll a$, так что область возможного взаимодействия определится размерами пакета a . В обоих случаях предположено, что распыление пакетов за время T невелико. Наконец, рис. 35, в иллюстрирует случай, когда пакеты распыляются так быстро, что всякая информация о моменте столкновения теряется полностью.

Рассмотренное ограничение на пределы $|t_2|, |t_1| \rightarrow \infty$ относится к любым частицам.

Нестабильные частицы приносят новые ограничения, имеющие принципиальное значение. Действительно, пусть в первичном пучке (Ψ_i) имеется частица с периодом распада τ_i . При $|t_1| > \tau_i$ нестабильная частица распадается и падающий пучок изменит свою природу. При $|t_1| \ll \tau_i$ нестабильную частицу можно считать стабильной. Следовательно, для предела $t_1 = -T$ возникает ограничение

$$\tau_i \gg T > \frac{b}{v} \left(\text{или} > \frac{a}{v} \right). \quad (32.9)$$

Подобное же ограничение возникает и в случае наличия нестабильных частиц в конечном состоянии; нестабильность частиц можно игнорировать, если

$$\tau_f \gg T > \frac{b}{v} \left(\text{или} > \frac{a}{v} \right). \quad (32.9')$$

Допустим теперь, что в спектре частиц имеется нестабильная частица с массой M , причем $2m < M < 3m$, так что частица M может распадаться на две m -частицы: $M \rightarrow 2m$. Пусть период распада этой частицы есть τ . Тогда возможны два подхода к построению \hat{S} -матрицы. Если асимптотические состояния задавать для $T \ll \tau$, то частицу M можно считать стабильной и \hat{S} -матрица будет иметь структуру, изображенную в таблице 2. В этом случае пространство $\mathfrak{H}(p)$ включает два типа пространств Лобачевского: первый тип — с кривизной, определяемой массой частиц m , другой тип — с кривизной, определяемой массой тяжелых частиц M .

Однако можно рассмотреть также случай, когда асимптотическое время $T \gg \tau$. При этом в асимптотических состояниях вообще не будут появляться нестабильные

M -частицы, так как за время $T \gg \tau$ они распадаются на две m -частицы. В этом случае асимптотическое пространство строится полностью из пространств Лобачевского, имеющих кривизну, характерную для частиц с массой m . Матрица рассеяния будет теперь иметь вид, представленный в таблице 1, характерный для случая, когда m -частицы вообще не образуют никаких комплексов.

Однако «память» о возможности образования нестабильной M -частицы остается и выражается в том, что матричный элемент (2.2), описывающий упругое рассеяние двух m -частиц $m + m \rightarrow m + m$, имеет резонанс при относительной энергии двух m -частиц, равной массе M -частицы. Условно такой резонанс можно было бы представить как процесс рассеяния, происходящий через образование промежуточной M -частицы:

$$m + m \rightarrow M \rightarrow m + m. \quad (32.10)$$

Ширина $\Delta E \sim \hbar/\tau$ этого резонанса определяется временем жизни M -частицы *).

Из приведенного выше обсуждения следует, что характер асимптотического пространства $\mathfrak{H}(p)$ и характер асимптотических состояний Ψ_i и Ψ_f существенно зависят от того, в каком смысле понимается в (32.1) предельный переход $t_1 \rightarrow -\infty$, $t_2 \rightarrow +\infty$.

§ 33. Масштаб для асимптотического времени T

Известные сейчас взаимодействия частиц принято делить на сильные, электромагнитные и слабые.

Эти взаимодействия определяют масштаб времени τ , который служит критерием для выбора асимптотического времени T . В случае сильных взаимодействий, какими являются взаимодействия барионов между собой, барионов с мезонами и мезонов между собой, радиус области взаимодействия b по порядку величины равен комптоновской длине π -мезонов, т. е. $b = \hbar/m_\pi c = 1,4 \cdot 10^{-13}$ см.

Время τ_s , в течение которого распадается комплекс сильно взаимодействующих частиц, будет $\tau_s = b/v$, где v — скорость частиц. Для $v \approx c$ получим $\tau_s \approx 5 \cdot 10^{-24}$ с.

*) Более подробное описание нестабильных частиц с помощью \hat{S} -матрицы см. в § 34.

При этих взаимодействиях образуются возбужденные состояния барионов—барионные резонансы и мезоны. Те и другие являются неустойчивыми частицами. Барионные резонансы образуются по схеме

$$m + N \rightarrow N^* \rightarrow N + m, \quad (33.1)$$

где m —какой-либо мезон, N —барион, N^* —возбужденный барион. На рис. 36 изображена соответствующая диаграмма Фейнмана. К числу подобных реакций относится, например, реакция

$$\pi + N \rightarrow N_{1/2}^* \rightarrow \pi + N, \quad (33.2)$$

где N —нуклон, а $N_{1/2}^*$ —резонансное состояние, имеющее квантовые числа $T_3 = 1/2$ (T_3 —третья компонента изотопического спина, $J = 1/2$, (спин), P -четность $+$, странность $S = 0$. Энергия этого резонанса лежит около 1400 Мэв.

В настоящее время известно большое число барионных резонансов [67]. Ширина этих резонансов Γ по порядку величины равна ~ 100 Мэв, так что время жизни этих частиц равно

$$\tau^* = \frac{\hbar}{\Gamma} = 6 \cdot 10^{-24} \text{ с},$$

т. е. оказывается того же порядка, что и время сильного взаимодействия исходных частиц τ_s . Такой же порядок величины имеет время жизни мезонов, распадающихся посредством сильного взаимодействия, например:

$$\rho \rightarrow \pi + \pi, \quad \rho^0 \rightarrow \eta + \pi, \quad K^* \rightarrow K + \pi. \quad (33.3)$$

Соответствующие диаграммы показаны на рис. 37.

Поэтому, выбирая $T \gg \tau_s$, мы должны считать барионные резонансы и мезоны, распадающиеся посредством сильного взаимодействия, нестабильными частицами; они не будут входить в асимптотическое пространство $\mathfrak{H}(p)$.

Заметим, что определенное выше время жизни барионных резонансов и мезонов относится к системе покоя,

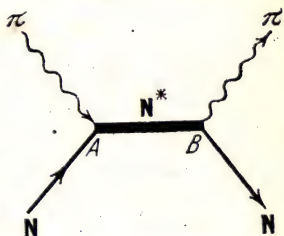


Рис. 36. Диаграмма барионного резонанса. Волнистая линия—пион (π), прямая — барион (N). Жирная линия—возбужденный нуклон (N^*). Обе вершины A и B «сильные».

Если распадающаяся частица движется, то время ее жизни τ' возрастает в E/m раз, где E — энергия нестабильной частицы, а m — ее масса покоя:

$$\tau' = \frac{E}{m} \tau. \quad (33.4)$$

По этой причине ультрарелятивистские частицы могут быть обнаружены на очень значительных расстояниях R от места их рождения:

$$R \approx c\tau' = c\tau \frac{E}{m}. \quad (33.5)$$

В силу этого нестабильная частица при $E \gg m$ может перейти в класс условно стабильных (если $\frac{E}{m} \tau_s \gg T \gg \tau_s$), и ее существование должно быть отображено в пространстве $\mathcal{H}(p)$.

Среди неустойчивых частиц, возникающих при сильных взаимодействиях, имеются π^0 -

мезоны. Такие мезоны распадаются на два γ -кванта, так что в механизме распада

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad (33.6)$$

участвует электромагнитное взаимодействие. На рис. 38 показана диаграмма такого распада. Кроме сильной вершины A имеются две электромагнитные вершины B и B' . Эти вершины пропорциональны константе электромагнитного взаимодействия $e/\sqrt{\hbar c} = \sqrt{\alpha}$, поэтому в выражение вероятности такого распада входит множитель $\alpha^2 = (e^2/\hbar c)^2 \approx 10^{-4}$. Благодаря ему время распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ много больше времени τ_s . Оценка диаграммы с учетом фазового объема для вершин B и B' дает время жизни π^0 -мезона $\tau_{\gamma\gamma} \approx 10^{-16}$ с.

Для T , удовлетворяющего неравенству

$$\tau_{\gamma\gamma} \gg T \gg \tau_s, \quad (33.6')$$

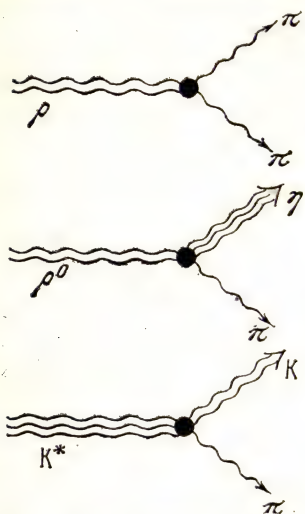


Рис. 37. «Сильные» вершины для распадов ρ -, ρ^0 - и K -мезонов.

π^0 -мезон может считаться стабильной частицей. При $T \gg \tau_{\gamma\gamma}$ в асимптотическое пространство $\mathfrak{N}(p)$ следует включить фотоны, так как вдали от места взаимодействия вместо мезона π^0 будут наблюдаться γ -кванты.

Значительное число мезонов и возбужденные барионы, распадающиеся с изменением странности ($\Delta S \neq 0$), имеют еще большее время жизни, так как в механизме их распада участвует слабое взаимодействие. Распад π^\pm -мезонов можно описать диаграммой, изображенной на рис. 39. Диаграмма состоит из одной «сильной» вершины A и вершины «слабого» взаимодействия W . Ввиду малости константы этого последнего взаимодействия время жизни π^\pm -мезонов, распадающихся по схеме

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu \quad (33.7)$$

(здесь μ — мю-мезон, ν — нейтрино), составляет $\tau_{\pi^\pm} \sim 10^{-8}$ с.

Следовательно, если мы намерены рассматривать π^\pm -мезоны как стабильные частицы, мы должны брать значения времени T , удовлетворяющие неравенству 10^{-8} с $\gg T \gg 10^{-24}$ с.

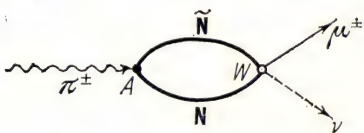


Рис. 39. Диаграмма распада π^\pm -мезона на μ -мезон и нейтрино ν . A — «сильная» вершина, W — вершина, описывающая слабое взаимодействие.

по диаграмме, изображенной на рис. 40. Здесь имеется два «сильных» узла A и B и один узел слабого взаимо-

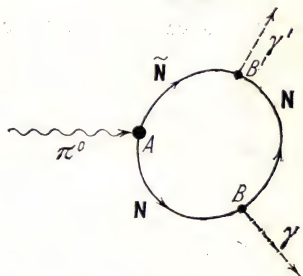


Рис. 38. Диаграмма для распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma'$. Вершина A — сильное взаимодействие, здесь π^0 -мезон диссоциирует на пару нуклон (N) — антинуклон (\bar{N}); в точке B нуклон испускает фотон γ . В точке B' нуклон N аннигилирует с антинуклоном \bar{N} и испускает фотон γ' .

$$\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu} \quad (33.8)$$

(Σ^- — гиперон, n — нейтрон, e^- — электрон, $\bar{\nu}$ — антинейтрино), происходят

действия W , описывающий процесс

$$\Lambda^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}. \quad (33.9)$$

Взаимодействие, характерное для этого процесса, считается «элементарным» слабым взаимодействием (см. [44]). Время жизни частиц, распадающихся с участием таких слабых процессов, составляет $\tau_\Sigma \sim 10^{-10}$ с.

Из изложенного видно, что переход к пределу $t_2 \rightarrow +\infty$, $t_1 \rightarrow -\infty$ в \hat{S} -матрице должен пониматься с серьезными ограничениями, вытекающими из анализа возможных физических процессов. В зависимости от выбора T меняется характер асимптотического пространства и асимптотических состояний Ψ_i и Ψ_f .

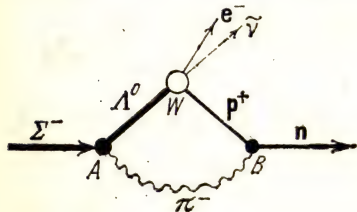


Рис. 40. Диаграмма, описывающая распад Σ^- -гиперона на нейтрон n , электрон e^- и антинейтрино $\bar{\nu}$. А—вершина сильного взаимодействия, W—вершина слабого взаимодействия, B—вторая вершина сильного взаимодействия.

§ 34. Нестабильные частицы (резонансы)

Возвратимся теперь к случаю, когда в спектре масс присутствует нестабильная частица, имеющая массу $3m > M > 2m$.

Как было разъяснено выше, если в асимптотике время T можно выбрать таким, что $T \ll \tau$, где $\tau = \hbar/\Gamma$ есть время жизни нестабильной частицы (Γ —ширина резонанса), то частицу M можно считать стабильной и включить ее в асимптотическое пространство $\mathfrak{H}(p)$. Поэтому при $T \ll \tau$ рассмотрение сводится к проведенному ранее в § 31, когда предполагалось существование двух сортов стабильных частиц с массами m и M .

Мы сосредоточимся сейчас на противоположном случае, когда $T \gg \tau$.

В этом случае в асимптотическом пространстве $\mathfrak{H}(p)$ будут фигурировать частицы лишь одного сорта с массой $m < M$. Частица с массой M будет обнаруживаться в виде резонансного состояния, которое при $T > t \gg \tau$

практически полностью распадается на исходные стабильные частицы — m -частицы.

Резонансному состоянию можно приписать определенную массу M (ширина резонанса $\Gamma \ll M$) и, следовательно, полный импульс $P = (P, P_0)$, где $P_0 = +\sqrt{P^2 + M^2}$.

Этому состоянию можно также приписать оператор внутреннего момента количества движения \hat{K}_μ , который складывается из спинов m -частиц $\hat{S}_{\mu\nu}$ (если они его имеют) и из орбитального момента их относительного движения $\hat{L}_{\mu\nu} = \hat{p}_\mu x_\nu - \hat{p}_\nu x_\mu$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$). Внутренний момент резонансного состояния \hat{K}_μ определяется следующим образом:

$$\hat{K}_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} \frac{\hat{M}_{\alpha\beta} \hat{P}_\lambda}{\sqrt{P^2}}, \quad (34.1)$$

где $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\lambda}$ — полностью антисимметричный единичный тензор, $\hat{M}_{\alpha\beta}$ — полный момент количества движения:

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = \hat{L}_{\alpha\beta} + \hat{S}_{\alpha\beta}. \quad (34.2)$$

В системе центра масс псевдовектор \hat{K}_μ сводится к оператору трехмерного момента количества движения $\hat{M} (\hat{M}_{23}, \hat{M}_{31}, \hat{M}_{12})$ [68].

Тогда в этой системе координат оператор \hat{K}_μ имеет собственные значения, характерные для нерелятивистской теории:

$$K^2 = \hbar J(J+1), \quad K_z = \hbar m_J, \quad (34.3)$$

где

$$-J < m_J < +J, \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad \text{или} \quad J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \quad (34.4)$$

Таким образом, резонансному состоянию, которое при $M \gg \Gamma$ представляется нестабильной частицей, приписывается не только масса M , полный импульс P , но и собственный момент количества движения K .

Резонансные состояния мезонов обычно называют общим именем «резонаны». За резонансным состоянием барион + мезон сохраняют название «резонанса».

Как резонаны, так и резонансы кроме названных характеристик имеют и другие (изотопический спин, внутреннюю четность, странность). Однако мы не будем подробнее останавливаться на этих вопросах, относящихся к систематике и спектроскопии элементарных частиц, ограничимся сделанными замечаниями и возвратимся к анализу простейшего случая возможного резонанса в системе двух скалярных частиц массы m . Мы будем изучать резонанс в системе центра масс, так что $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0$ ($\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ — импульсы частиц), и сосредоточимся на относительном движении этих частиц, и притом с определенным моментом количества движения J .

Асимптотическая волновая функция, описывающая относительное движение двух m -частиц, может быть представлена в виде суммы сходящихся и расходящихся сферических волн:

$$\psi_J(r, t) = \frac{1}{r} [a(s) e^{ipr} + b(s) e^{-ipr}] e^{-iEt}, \quad (34.5)$$

где p — импульс относительного движения, E — энергия частиц в системе центра масс, r — расстояние между частицами, t — их общее время (см. дополнение X).

В дальнейшем удобно импульс p и энергию E считать функциями инвариантной энергии:

$$s = P_0^2 - \mathbf{P}^2. \quad (34.6)$$

В системе центра масс имеем

$$s = P_0^2 = E^2 = (E_1 + E_2)^2 = 4m^2 + 4p^2, \quad (34.7)$$

откуда

$$p^2 = \frac{1}{4} s - m^2, \quad (34.8)$$

так что

$$ip(s) = - \sqrt{m^2 - \frac{s}{4}}, \quad (34.9)$$

$$-iE = - \sqrt{s} \quad (34.10)$$

и

$$\psi_J(r, t) = \frac{1}{r} [a(s) e^{-\sqrt{m^2 - s/4} r} + b(s) e^{+\sqrt{m^2 - s/4} r}] e^{-\sqrt{s} t}. \quad (34.11)$$

Будем теперь рассматривать s как комплексную переменную и для устранения двужначности радикалов в (34.11) сделаем в комплексной плоскости (s) разрезы на действительной оси от $s = -\infty$ до $s = 0$ и от $s = 4m^2$ до $s = +\infty$ (см. рис. 41).

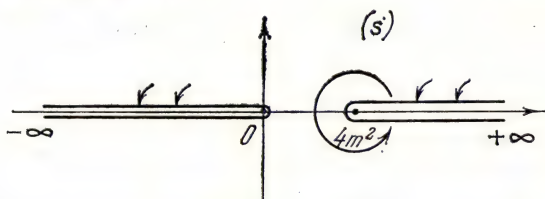


Рис. 41. Комплексная плоскость переменной s . Показано два разреза: от $s = -\infty$ до $s = 0$ и от $s = 4m^2$ до $s = +\infty$.

Через эти разрезы мы будем продолжать функции комплексной переменной s на второй лист римановой поверхности. Первый лист этой поверхности («физический») мы определим таким образом, что на нем

$$\sqrt{m^2 - \frac{s}{4}} = \varepsilon^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\varphi - \pi)}, \quad (34.12)$$

$$\operatorname{Re} \sqrt{m^2 - \frac{s}{4}} = \varepsilon^{1/2} \sin \frac{1}{2} \varphi > 0,$$

где

$$\varepsilon, \varepsilon^{1/2} > 0 \text{ и } -m^2 + \frac{s}{4} = \varepsilon e^{i\varphi}. \quad (34.13)$$

На втором листе («нефизическом») положим

$$\sqrt{m^2 - \frac{s}{4}} = \varepsilon^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\varphi + \pi)}, \quad (34.14)$$

$$\operatorname{Re} \sqrt{m^2 - \frac{s}{4}} = -\varepsilon^{1/2} \sin \frac{1}{2} \varphi.$$

Импульс $p(s)$ на основании (34.9) и (34.12) определится теперь следующим образом:

а) на физическом листе

$$ip(s) = -\sqrt{m^2 - \frac{s}{4}} = i\varepsilon^{1/2} e^{i\varphi/2}, \quad (34.15)$$

$$p(s) = +\varepsilon^{1/2} e^{i\varphi/2}, \quad \operatorname{Im} p(s) > 0; \quad (34.15')$$

б) на втором, нефизическом листе

$$ip(s) = -\sqrt{m^2 - \frac{s}{4}} = -i\varepsilon^{1/2}e^{i\varphi/2}, \quad (34.16)$$

$$p(s) = -\varepsilon^{1/2}e^{i\varphi/2}, \quad \text{Im } p(s) < 0. \quad (34.16')$$

Таким образом, физический лист поверхности (s) отображается на верхнюю полуплоскость поверхности (p), а нефизический — на ее нижнюю полуплоскость.

Заметим еще, что в стационарном состоянии компонента потока частиц J , направленная по радиусу-вектору, должна равняться нулю. Отсюда следует

$$b(s) = a^*(s^*). \quad (34.17)$$

Условие, определяющее дискретные уровни нашей системы, стабильные или резонансные, гласит:

$$b(s) = 0, \quad (34.18)$$

причем для стабильных уровней

$$-\sqrt{-s} = -iE \quad \text{и} \quad 0 < E < 2m. \quad (34.19)$$

Резонансные уровни лежат в области непрерывного спектра. Для них имеем

$$-\sqrt{-s} = -iE - \Gamma, \quad (34.20)$$

где $E > 2m$, $\Gamma > 0$. Выбор знаков в (34.20) обеспечивает экспоненциальный распад резонансного уровня при $t \rightarrow \infty$. Из (34.20) следует, что

$$s = E^2 - 2iE\Gamma \quad (34.21)$$

(для $\Gamma \ll E$), так что $\text{Re } s > 0$, $\text{Im } s < 0$.

В случае стабильных уровней из (34.11), (34.12), (34.18) и (34.19) следует

$$\psi_j(r, t) = \frac{1}{r} a(s) \exp(-\varepsilon^{1/2}r - iEt). \quad (34.22)$$

Заметим, что на втором римановом листе мы имели бы

$$\psi_j'(r, t) = \frac{1}{r} a(s) \exp(+\varepsilon^{1/2}r - iEt), \quad (34.22')$$

так что следовало бы вместо (34.18) требовать $a(s) = 0$. В силу (34.17) это условие давало бы те же уровни.

Вернемся теперь к неустойчивому уровню. Если бы мы оставались на первом физическом листе, то попасть из верхней полуплоскости в нижнюю точку $s = E^2 - 2iE\Gamma$ ($\Gamma < 0$), лежащую под разрезом, мы могли бы только путем обхода точки $s = 4m^2$, как это показано стрелкой на рис. 41. При этом аргумент функции $i\rho(s)$ (см. (34.9)) получил бы дополнительную фазу $+2\pi$, т. е. в этом случае

$$i\rho(s) = +\varepsilon^{1/2} \exp \left[\frac{i}{2} (\varphi - \pi) + \frac{i2\pi}{2} \right] = i\varepsilon^{1/2} \exp \left(\frac{i\varphi}{2} \right), \quad (34.23)$$

где φ определяется выражением

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{2\Gamma}{E(1-4m^2/E^2)} + 2\pi n + O\left(\frac{\Gamma^2}{E^2}\right), \quad (34.24)$$

в котором $n=0$ для первого листа и $n=1$ для второго. Поэтому на физическом листе имеем

$$p(s) = p' - i\kappa', \quad p' = \varepsilon^{1/2} \cos \frac{\varphi}{2}, \quad \kappa' = -\varepsilon^{1/2} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (34.25)$$

так что $p' > 0$ и $\kappa' > 0$. Следовательно, на физическом листе волновая функция (34.22) имела бы вид

$$\psi_j(r, t) = \frac{1}{r} a(s) \exp[i p' r - i E t] \exp[\kappa' r - \Gamma t]. \quad (34.26)$$

Нетрудно видеть, что это решение противоречит уравнению непрерывности для потока J , так как оно уменьшается с ростом r ($\kappa' < 0$) и с ростом t ($\Gamma > 0$).

Правильная для неустойчивого уровня волновая функция $\psi_j(r, t)$ находится на втором, нефизическом листе. Действительно, в этом случае согласно (34.16') имеем

$$\left. \begin{aligned} p(s) &= -\varepsilon^{1/2} \exp \left(i \frac{\varphi + 2\pi}{2} \right) = p'' + i\kappa'', \\ p'' &= \varepsilon^{1/2} \cos \frac{\varphi}{2} > 0, \quad \kappa'' = \varepsilon^{1/2} \sin \frac{\varphi}{2} > 0, \end{aligned} \right\} \quad (34.27)$$

так что волновая функция приобретает вид

$$\psi_j(r, t) = \frac{1}{r} a(s) \exp[i(p'' r - E t)] \exp(-\kappa'' r - \Gamma t), \quad (34.28)$$

имеющий правильное поведение в плоскости (r, t) .

Обратимся теперь к изучению пространственно-временных свойств общего асимптотического решения (34.5). Для этой цели будет целесообразно изменить нормировку решения (34.5) таким образом, чтобы рассеянная волна $u(p, r)$ имела вид

$$u(p, r) = \frac{S_J(p) \exp[i(pr - Et)]}{2ipr}, \quad (34.29)$$

где $S_J(p)$ — элемент матрицы рассеяния в состоянии с полным моментом количества движения J для упругого рассеяния при энергии E и относительном импульсе p . Нормировка (34.29) соответствует первичной асимптотической волне в форме

$$\psi_0(r, t) = \frac{\exp[i(pr - Et)]}{2ipr} - \frac{\exp[-i(pr + Et)]}{2ipr}. \quad (34.30)$$

Сопоставление формул (34.29) и (34.30) с (34.5) показывает, что

$$S_J(p) = \frac{a(s)}{b(s)} = \quad (34.31)$$

$$= g(s) \frac{E - (E_R + i\Gamma)}{E - (E_R - i\Gamma)}, \quad (34.32)$$

где в функцию $g(s)$ мы объединили множители, регулярные вблизи полюса $E = E_R - i\Gamma$.

Предположим теперь, что начальная волна ψ_0 задана в виде волнового пакета

$$\psi(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(p) \psi_0(r, t) dp. \quad (34.33)$$

Выбор $\psi(r, t)$ в виде пакета позволяет локализовать момент столкновения частицы около $t = 0$. Считая, что функция $c(p)$ сосредоточена около $p = p_R$, мы можем переписать (34.33) в виде

$$\begin{aligned} \psi(r, t) = & \frac{c}{2ip_R r} \exp[i(p_R r - E_R t)] f(r - v_R t) - \\ & - \frac{c}{2ip_R r} \exp[i(-p_R r - E_R t)] f(r + v_R t), \end{aligned} \quad (34.34)$$

где $v_R = (\partial E / \partial p)_R$ есть относительная скорость частиц вблизи резонансной энергии $E \approx E_R$. Функция f убывает

вне интервала

$$|r \pm vt| > \frac{\hbar}{\Delta}, \quad (34.35)$$

где Δ — ширина пакета в импульсном пространстве:

$$c(p) \approx 0 \quad (34.35')$$

для $|p - p_R| > \Delta$.

Отсюда следует, что столкновение произойдет около момента времени

$$t = \hbar / \Delta v_R$$

(предполагаем, что ширина пакета Δ больше радиуса взаимодействия частиц).

Далее, мы будем считать, что

$$\frac{\hbar}{\Delta} \ll \frac{\hbar v_R}{\Gamma} = \Lambda, \quad (34.36)$$

где Λ — длина распада. Рассеянная волна, возникающая при столкновении пакетов (34.34), согласно (34.29) и (34.33) будет иметь вид

$$u_j(p, r) = \frac{1}{2ip_R r} \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \exp[(pr - Et)] g(s) \frac{E - (E_R + i\Gamma)}{E - (E_R - i\Gamma)} dp. \quad (34.37)$$

Положим $p - p_R = \xi$, тогда

$$u_j(p, r) = \frac{\exp[i(p_R r - E_R t)]}{2ip_R r} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} c(p_R + \xi) \exp[i\xi(r - v_R t)] g(s) \frac{\xi - i\frac{\Gamma}{v_R}}{\xi + i\frac{\Gamma}{v_R}} d\xi. \quad (34.38)$$

Теперь мы видим, что если $g(s)$ и $c(p)$ таковы, что контур интегрирования в (34.38) можно замкнуть по большому полукругу*), то при $(r - v_R t) < 0$ это замыкание должно быть сделано в нижней полуплоскости, а при $(r - v_R t) > 0$ — в верхней.

*) Если $c(p)$ достаточно быстро убывает при росте радиуса круга $|p - p_R| \rightarrow \infty$, то поведение остальных функций под знаком интеграла в (34.38) оказывается несущественным.

В результате мы получим

$$u(p, r) = -i2\pi\hbar c \frac{\exp [i(p_R r - E_R t)]}{p_R r \Lambda} \exp \left[(r - v_R t) \frac{\hbar}{\Lambda} \right] \quad \text{для } r - v_R t < 0 \quad (34.39)$$

и

$$u(p, r) = 0 \quad \text{для } r - v_R t > 0. \quad (34.39')$$

Так осуществляется причинность в резонансном распаде: распады вообще не происходят в области $r > v_R t$, которая не достигается резонансами, рождающимися при $r \sim 0$, $t = 0$ (с точностью до допуска \hbar/Λ).

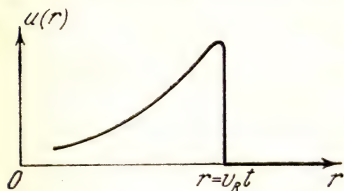


Рис. 42. Распад резонансов, образующихся около точки $r=0$. В области $0 < r < v_R t$ резонансы распадаются экспоненциально. В области $r > v_R t$ их волновая функция $u(r)$ равна нулю.

В области $r < v_R t$ резонансы распадаются экспоненциально с константой распада $\Gamma = \hbar v_R / \Lambda$ (рис. 42).

Приведенный здесь анализ нестабильных состояний показывает, что S -матрица способна правильно описать пространственно-временное поведение нестабильных частиц («резонансов» и «резонансов»).

В дополнении XI для удобства читателя приведен детальный расчет нерелятивистского резонанса, который может служить иллюстрацией к изложенной в этом параграфе теории.

§ 35. Условия макроскопической причинности для \hat{S} -матрицы

В 1942 г. В. Гейзенберг выдвинул свою знаменитую программу развития квантовой теории, в основу которой была положена идея описания явлений в мире элементарных частиц с помощью \hat{S} -матрицы вместо волновой функции.

Значение этой программы не было отвергнуто дальнейшим развитием теоретической и экспериментальной физики. De facto методы, основанные на понятии волновой функции, явно уступили методам, основанным на

изучении аналитических свойств \hat{S} -матрицы. Теперь гибель волновой функции кажется почти очевидной. Однако нет особых оснований радоваться этому факту: современный математический аппарат \hat{S} -матрицы не имеет продолжения в область малого, в самую «кухню» элементарных событий.

Нередко теоретические схемы, оперирующие только \hat{S} -матрицей, похожи на производство, в котором есть только два цеха: цех приема полуфабрикатов и цех упаковки готовой продукции, цех же переработки отсутствует.

Аналитическое продолжение \hat{S} -матрицы с поверхности масс и поверхности энергии в некоторой мере позволяет заглянуть в этот «цех переработки», в самое «производство» элементарных событий. Все же методы аналитического продолжения, по всей видимости, не в состоянии дать полную картину физических явлений в мире элементарных частиц.

Мы должны признать, что наши современные возможности весьма ограничены. Однако два обстоятельства говорят в пользу метода \hat{S} -матрицы:

а) в мире элементарных частиц, по-видимому, нет явлений, которые не могли бы быть описаны в терминах \hat{S} -матрицы; б) \hat{S} -матрица, по крайней мере в принципе, принадлежит к числу наблюдаемых величин. Поэтому мы имеем основания рассматривать \hat{S} -матрицу как такую теоретическую конструкцию, которая может сохранить свою значимость и в будущей теории.

Таким образом, изучение \hat{S} -матрицы представляется вполне разумным направлением в теоретической физике, и, следуя ему, мы будем надеяться, что \hat{S} -матрица останется и в будущем тем языком, на котором и в дальнейшем будет возможно выразить наблюдаемые результаты. Такая вера в \hat{S} -матрицу обязывает нас формулировать принцип причинности непосредственно на языке \hat{S} -матрицы, не прибегая к какой-либо теории поля и к условиям микропричинности.

На первый взгляд в самой постановке вопроса имеется неустранимое противоречие, заключающееся в том, что

\hat{S} -матрица определена в пространстве импульсно-энергетических переменных, в многомерном пространстве Лобачевского $\mathfrak{R}_3(p)$; для описания же причинной связи по самому смыслу этой связи необходимы пространственно-временные переменные, определенные в пространстве $\mathfrak{R}_4(x)$.

В силу этого причинность на языке \hat{S} -матрицы может быть сформулирована лишь с той степенью определенности,

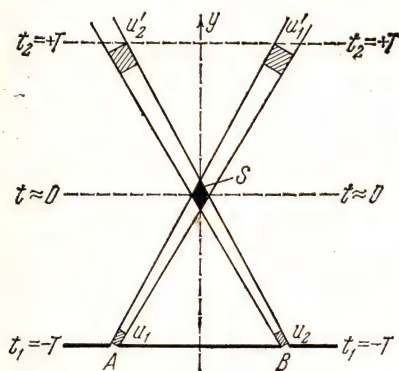


Рис. 43. Описание столкновения с помощью волновых пакетов. Пакеты u_1 и u_2 образуются при $t_1 = -T$ в диафрагмах экрана A и B . В момент времени $t \approx 0$ происходит столкновение пакетов (черная область S). Далее пакеты вновь удаляются, постепенно расплываясь. Это увеличение размеров первичных пакетов показано на рисунке для момента времени $t_2 = +T$. Рассеянные волны не показаны.

охватывающего процесс сближения волновых пакетов, их столкновение и последующий разлет могут представлять локализованные в пространстве и времени частицы. Возможность существования таких пакетов была показана в § 18 (см. [30, 74]).

Там же выведены условия для описания процесса столкновения с помощью волновых пакетов. Эти условия гласят:

$$\frac{a^2}{\lambda} \gg R \gg a \gg \lambda, \quad (35.1)$$

которая ограничивается возможностью одновременного использования обоих пространств $\mathfrak{R}_3(p)$ и $\mathfrak{R}_4(x)$. Такая возможность характерна для классической макроскопической физики.

Поэтому причинность, которую мы будем изучать в этом разделе, мы называем *макроскопической причинностью* [69, 70].

Одновременное использование обоих пространств $\mathfrak{R}_3(p)$ и $\mathfrak{R}_4(x)$ покоится на принципиальной возможности построить волновые пакеты, которые в течение времени от $t_1 = -T$ до $t_2 = +T$ (T — асимптотическое время) настолько мало расплываются, что в течение времени $2T$,

где λ — характеристическая для пакета длина волны, a — размер пакета, R — расстояние между пакетами, $R = Tv$, v — относительная скорость пакетов.

На рис. 43 изображены волновые пакеты $u_1(x_1)$ и $u_2(x_2)$, описывающие частицы в начальном состоянии. При выполнении условий (35.1) эти пакеты мало изменяются за время от $t_1 = -T$ до $t_2 = +T$.

Обратимся теперь к математическому описанию столкновения этих пакетов, пользуясь теорией \hat{S} -матрицы. Мы выпишем формулы в явном виде для скалярных частиц. Согласно (31.28) матричный элемент \hat{S} -матрицы в импульсном представлении записывается в форме

$$S_{fi} = \langle p' | \hat{I} | p \rangle + i\delta^4(P' - P) \frac{T(p', p)}{\sqrt{2p_0' \dots 2p_0}}. \quad (35.2)$$

Более подробно функции $\langle p' | I | p \rangle$ и $T(p', p)$ для перехода из состояния $(p) \equiv (p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1)$ в состояние $(p') \equiv (p_{m+n}, p_{m+n-1}, \dots, p_{n+2}, p_{n+1})$ запишутся в виде

$$\langle p' | \hat{I} | p \rangle = \prod_{s=1}^n \delta^3(p_{n+s} - p_s) \text{ при } m=n, \quad (35.3)$$

иначе $\langle p' | \hat{I} | p \rangle = 0$, и

$$\frac{T(p', p)}{\sqrt{2p_0' \dots 2p_0}} = \frac{T(p_{m+n}, p_{m+n-1}, \dots, p_2, p_1)}{\sqrt{2p_{m+n}^0} \sqrt{2p_{m+n-1}^0} \dots \sqrt{2p_1^0}}, \quad (35.3')$$

где числитель есть инвариантная функция импульсов, а $p_1^0, p_2^0, \dots, p_{m+n}^0$ — их четвертые компоненты.

Для определенности будем считать, что в начальном состоянии Ψ_i имеется только две частицы, которые описываются волновыми пакетами $u_1(x_1)$ и $u_2(x_2)$, принадлежащими к классу пакетов, удовлетворяющих условиям (35.1). Такие пакеты могут быть представлены интегралами

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{u}(p) \exp(ipx) \frac{d^3p}{2p^0}, \quad (35.4)$$

где $p^0 = \sqrt{m^2 + p^2}$. Волновая функция начального состояния Ψ_{in} в импульсном представлении запишется в виде

$$\tilde{\Psi}_{in}(p_2, p_1) = \frac{\tilde{u}_2(p_2) \tilde{u}_1(p_1)}{\sqrt{2p_2^0} \sqrt{2p_1^0}}. \quad (35.5)$$

Тогда волновая функция конечного состояния $\tilde{\Psi}_{\text{out}}(p_4, p_3)$ для $m=4$ (упругое столкновение) получится из (35.5) с помощью преобразования посредством \hat{S} -матрицы (35.2):

$$\tilde{\Psi}_{\text{out}}(p_4, p_3) = \tilde{\Psi}_{\text{in}}(p_4, p_3) + i \int \delta^4(p_4 + p_3 - p_2 - p_1) \frac{T(p_4, p_3; p_2, p_1)}{\sqrt{2p_4^0 2p_3^0}} \tilde{u}_2(p_2) \tilde{u}_1(p_1) \frac{d^3 p_2 d^3 p_1}{2p_2^0 2p_1^0}, \quad (35.6)$$

и волновая функция для $m > 4$ (рождение при столкновении новых частиц) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{out}}(p_m, p_{m-1}, \dots, p_3) = \\ = + i \int \delta^4(p_m + p_{m-1} + \dots + p_3 - p_2 - p_1) \times \\ \times \frac{T(p_m, p_{m-1}, \dots, p_3; p_2, p_1)}{\sqrt{2p_m^0 2p_{m-1}^0 \dots 2p_3^0}} \tilde{u}_2(p_2) \tilde{u}_1(p_1) \frac{d^3 p_2}{2p_2^0} \frac{d^3 p_1}{2p_1^0}. \end{aligned} \quad (35.7)$$

Из (35.4) следует, что

$$\frac{\tilde{u}(p)}{2p_0} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int u(x) \exp[-ipx] d^3x. \quad (35.8)$$

Это соотношение позволяет нам перейти в (35.6) и (35.7) к координатному представлению. Для этого мы выразим в (35.6) и (35.7) амплитуды $\tilde{u}_2(p_2)$ и $\tilde{u}_1(p_1)$ с помощью (35.8) через $u_1(x_1)$ и $u_2(x_2)$, далее умножим слева (35.6) и (35.7) на экспоненту

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}(m-2)}} \frac{\exp[i(p_m x_m + p_{m-1} x_{m-1} + \dots + p_3 x_3)]}{\sqrt{2p_m^0 2p_{m-1}^0 \dots 2p_3^0}} \quad (35.9)$$

и проинтегрируем произведение по $d^3 p_m d^3 p_{m-1} \dots d^3 p_3$. В результате мы получим

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{out}}(x_4, x_3) = \Psi_{\text{in}}(x_4, x_3) + \\ + i \int \mathcal{G}(x_4, x_3 | x_2, x_1) u_2(x_2) u_1(x_1) d^3 x_2 d^3 x_1, \end{aligned} \quad (35.10)$$

и в общем случае, когда $m > 4$,

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{out}}(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3) = \\ = + i \int \mathcal{G}(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3 | x_2, x_1) u_2(x_2) u_1(x_1) d^3 x_2 d^3 x_1, \end{aligned} \quad (35.11)$$

где функции $\mathcal{G}(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3 | x_2, x_1)$ определены следующим образом:

$$\mathcal{G}(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3 | x_2, x_1) = \frac{\partial^2 \mathcal{G}_0(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3 | x_2, x_1)}{\partial t_2 \partial t_1}. \quad (35.12)$$

Здесь $t_2 = x_2^0$, $t_1 = x_1^0$ суть четвертые компоненты векторов x_2 и x_1 , а функция $\mathcal{G}_0(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3 | x_2, x_1)$ равна

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3 | x_2, x_1) = & \\ & = \int \delta^4(p_m + p_{m-1} + \dots + p_3 - p_2 - p_1) \times \\ & \times T(p_m, p_{m-1}, \dots, p_3; p_2, p_1) \times \\ & \times \exp[i(p_m x_m + p_{m-1} x_{m-1} + \dots + p_3 x_3 - p_2 x_2 - p_1 x_1)] \times \\ & \times \frac{d^3 p_m d^3 p_{m-1} \dots d^3 p_1}{2 p_m^0 2 p_{m-1}^0 \dots 2 p_1^0}. \end{aligned} \quad (35.13)$$

Из (35.13) видно, что функция \mathcal{G}_0 есть не что иное, как один из матричных элементов T (см. также (35.2)), взятый в координатном представлении. Функции \mathcal{G}_1 и \mathcal{G}_0 удовлетворяют уравнению Клейна по любому из своих аргументов:

$$(\square_s^2 - m^2) \mathcal{G}_0 = 0, \quad (\square_s^2 - m^2) \mathcal{G}_1 = 0; \quad (35.14)$$

$s = 1, 2, \dots, m$. Эти функции описывают процесс столкновения в терминах свободных частиц. Они являются аналогами функций $s(x_m, x_{m-1}, \dots, x_1)$, рассмотренных в § 24 (см. (24.5) и (24.6)), но не совпадают с ними, так как спектральное разложение функций $s(x_m, x_{m-1}, \dots, x_1)$ выходит за пределы пространства Лобачевского $\mathfrak{N}_3(p)$.

Функции $s(x_m, x_{m-1}, \dots, x_2, x_1)$, основанные на представлении матрицы рассеяния \hat{S} через локальные поля (см. дополнение VII), могут не существовать, в то время как функции $\mathcal{G}(x_m, x_{m-1}, \dots | x_2, x_1)$ основываются на более общем предположении о существовании матрицы рассеяния \hat{S} , взятой для реальных частиц и на поверхности энергии.

Сформулируем теперь принцип макроскопической причинности: волновые пакеты $u(x_1)$ и $u(x_2)$, представляющие начальное состояние $\Phi_{in}(x_2, x_1)$, дают исчезающе

малый вклад в рассеянную волну $\Phi_{\text{out}}(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3)$ если в асимптотической области, т. е. для

$$|x_i - x_k| \geq R, |t_i - t_k| \geq T, \quad (35.15)$$

точки x_1, x_2, \dots, x_m лежат вне области, ограниченной условиями

$$(x_2 - x_1)^2 = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 > 0 \quad (35.16)$$

и

$$(x_i - x_1)^2 > 0, t_i - t_1 > T, \quad (35.17)$$

$$(x_i - x_2)^2 > 0, t_i - t_2 > T \quad (35.17')$$

($i=3, \dots, m-1, m$). Эти условия поясняются рисунком 44 на примере упругого столкновения ($m=4$).

Обозначим область, определенную условиями (35.15) — (35.17'), символом $\mathfrak{M}(x)$. Тогда на языке функций $\mathfrak{G}(x) = \mathfrak{G}(x_m, x_{m-1}, \dots | x_2, x_1)$ принцип макроскопической причинности может быть выражен следующим образом: функции $\mathfrak{G}(x)$ должны исчезать достаточно быстро вне области $\mathfrak{M}(x)$:

$$\mathfrak{G}(x) \rightarrow 0 \text{ вне } \mathfrak{M}(x). \quad (35.18)$$

Таким образом, макроскопические условия причинности вносят ограничения на поведение функций $\mathfrak{G}(x)$ только в асимптотической области. Слова «исчезать достаточно быстро» должны пониматься в смысле: «существенно быстрее, нежели исчезают обычные каузальные взаимодействия».

Заметим, что эти взаимодействия исчезают в волновой зоне, как $1/R$. Поэтому акаузальные взаимодействия должны исчезать существенно быстрее, чем $1/R$. Если

Заметим, что эти взаимодействия исчезают в волновой зоне, как $1/R$. Поэтому акаузальные взаимодействия должны исчезать существенно быстрее, чем $1/R$. Если

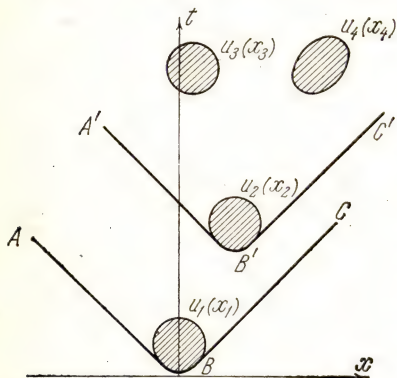


Рис. 44. Макроскопическая причинность. ABC — световой конус у волнового пакета $u_1(x_1)$, $A'B'C'$ — световой конус у пакета $u_2(x_2)$. $u_3(x_3)$ и $u_4(x_4)$ — волновые пакеты, описывающие рассеянные волны. Относительное расположение четырех пакетов, показанное на рисунке, соответствует выполнению условий макроскопической причинности.

они исчезают в области ближе волновой зоны сигнала, т. е. при $R < \lambda$, где λ — длина волны, то они вообще не могут быть обнаружены экспериментально. Поэтому описанное выше условие макропричинности оставляет очень широкие возможности для различных модификаций микропричинности и, стало быть, для изменения геометрии в малом. Можно сказать, что \hat{S} -матрица отличается крайней веротерпимостью и готова ассимилировать самые различные теоретические схемы описания взаимодействия элементарных частиц и их внутренней структуры, поскольку изменения относятся к малым пространственным расстояниям $\approx b$ и малым промежуткам времени $\approx b/v$. Теоретические схемы, в которых нарушается микропричинность, мы будем называть *акаузальными* (или *нелокальными*, ср. § 26). Если акаузальность не нарушает макропричинности, то мы будем называть такие схемы *локально-акаузальными*.

Таким образом, для построения такой схемы достаточно, чтобы: а) \hat{S} -матрица оставалась локально-акаузальной. Далее, следует вспомнить необходимое условие унитарности \hat{S} -матрицы (31.3): б) \hat{S} -матрица должна быть унитарной *). Совмещение этих обоих условий оказывается не тривиальным и представляет собою основную проблему нелокальной теории. В следующем параграфе мы рассмотрим примеры функций распространения, удовлетворяющих условию *локальной акаузальности*, а в § 37 будет приведен пример построения \hat{S} -матрицы, удовлетворяющей условиям а) и б).

§ 36. Примеры акаузальных функций влияния

Рассмотрим сперва акаузальный аналог причинной функции $D_c(x)$, которая симметрична относительно прошлого и будущего: $D_c(x) \neq 0$ для $\varepsilon = +1$ и для $\varepsilon = -1$. В силу этого она весьма удобна для построения симметричной относительно запаздывания и опережения акаузальной функции влияния.

*) Можно обсуждать, насколько действительно необходимо условие унитарности, однако отказ от этого требования ведет к очень серьезным трудностям (см. дополнение XII).

Для простоты мы рассмотрим случай, когда масса покоя частиц поля, переносящего взаимодействие, равна нулю. В этом случае, согласно дополнению I (формула (I.6)), имеем

$$D_c(x) = \frac{1}{4\pi} \left[\delta(x^2) + \frac{i}{\pi} \frac{1}{x^2} \right], \quad x^2 = t^2 - r^2, \\ t = t_2 - t_1, \quad r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|. \quad (36.1)$$

Разлагая здесь $\delta(x^2)$ и $\frac{1}{x^2}$, получим другое представление этой формулы:

$$D_c(x) = \frac{1}{4\pi r} [\delta^+(t-r) + \delta^-(t+r)]. \quad (36.1')$$

Образуем теперь акаузальную функцию $D_c(x, a)$, которая при достаточно малом значении параметра a аппроксимирует причинную функцию $D_c(x)$. Для этого заменим

$$\delta(x^2) \quad \text{на} \quad \delta(x^2, a) = \frac{a^2}{\pi} \frac{1}{x^4 + a^4} \quad (36.2)$$

и

$$\frac{i}{\pi} \frac{1}{x^2} \quad \text{на} \quad i \frac{x^2}{a^2} \delta(x^2, a). \quad (36.2')$$

Тогда $D_c(x, a)$ приобретает вид

$$D_c(x, a) = \frac{1}{4\pi} \left[\delta(x^2, a) + i \frac{x^2}{a^2} \delta(x^2, a) \right] = \\ = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{i}{\pi} \frac{1}{x^2 + ia^2} = \frac{-1}{2\pi i \sqrt{r^2 - ia^2}} \left[\frac{1}{t - \tau_1} - \frac{1}{t - \tau_2} \right] \right\}, \quad (36.3)$$

где

$$\tau_1 = +\sqrt{r^2 - ia^2}, \quad \tau_2 = -\sqrt{r^2 - ia^2}. \quad (36.4)$$

Вычислим теперь поле $\varphi(x_2)$, создаваемое в точке $x_2(\mathbf{x}_2, t_2)$ источником $Q(x)$, локализованным около точки $x_1(\mathbf{x}_1, t_1)$ в пределах пространственно-временной области $\Omega(x_1) \approx L^3 T$. Пусть этот источник описывается выражением

$$Q(x_1) = \rho \left(\frac{\mathbf{x}_1}{L} \right) g \left(\frac{t_1}{T} \right) e^{i\omega t_1}, \quad (36.5)$$

где $\omega > 0$, $\omega T \gg 1$, $L \approx cT$. В частности,

$$\rho\left(\frac{\mathbf{x}_1}{L}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{L}{\mathbf{x}_1^2 + L^2}, \quad g\left(\frac{t_1}{T}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{T}{t_1^2 + T^2}, \quad (36.6)$$

как это было в § 26.

Поле $\varphi(x_2)$, создаваемое источником $Q(x_1)$ (36.5) посредством акаузальной функции влияния $D_c(x, a)$ (36.3), вычисляется по формуле

$$\varphi(x_2) = \int \rho\left(\frac{\mathbf{x}_1}{L}\right) d^3x_1 \int_{-\infty}^{\infty} D_c(x, a) g\left(\frac{t_1}{T}\right) e^{i\omega t_1} dt_1. \quad (36.7)$$

Подставляя сюда $D_c(x, a)$ из (36.3), найдем

$$\begin{aligned} \varphi(x_2) = & \frac{i}{8\pi^2} \int \rho\left(\frac{\mathbf{x}_1}{L}\right) \frac{d^3x_1}{\sqrt{r^2 - ia^2}} \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\frac{t_1}{T}\right) e^{i\omega t_1} \left[\frac{1}{t - \tau_1} - \frac{1}{t - \tau_2} \right] dt_1, \\ & (36.8) \end{aligned}$$

где $t = t_2 - t_1$. В комплексной плоскости $t_1 = t'_1 + it''_1$, и мы имеем полюсы при $t_1 = t_2 - \tau_1$, $t_1 = t_2 - \tau_2$ и $t_1 = \pm iT$. Интеграл в (36.8) при $\omega > 0$ можно замкнуть в верхней полуплоскости бесконечно большим полукругом. Полюс $t_1 = iT$ дает вклад, исчезающий при $\omega T \rightarrow \infty$ как $e^{-\omega T}$, так что остается единственный вычет от полюса $t_1 = t_2 - \tau_1$, $\text{Im } \tau_1 < 0$.

Таким образом, получается

$$\begin{aligned} \varphi(x_2) = & -\frac{1}{4\pi} \int \rho\left(\frac{\mathbf{x}}{L}\right) \frac{d^3x}{\sqrt{r^2 - ia^2}} \exp[i\omega(t_2 - \sqrt{r^2 - ia^2})] \times \\ & \times g\left(\frac{t_2 - \sqrt{r^2 - ia^2}}{T}\right). \quad (36.9) \end{aligned}$$

Выражение

$$\mathfrak{G}_{\text{ret}}(r, t_2, a) = \frac{\exp[i\omega(t_2 - \sqrt{r^2 - ia^2})]}{\sqrt{r^2 - ia^2}} \quad (36.10)$$

можно рассматривать как запаздывающую функцию Грина для почти периодического источника (частота ω). Как видно, эта функция не имеет сингулярности при $r=0$, а при $r \gg a$ переходит в функцию Грина $\mathfrak{G}_{\text{ret}}(r, t_2)$, вычисленную в § 26 с помощью функции $D_c(x)$. Правиль-

ный характер причинной связи при $r \gg a$ в рассматриваемом примере обеспечивается двумя обстоятельствами:

а) надлежащим выбором сингулярностей функции $D_c(x, a)$ и

б) выбором источника: источник $Q(x_1)$ локализован в пространственно-временной области $\Omega \approx L^3 T \gg \lambda^3 \frac{1}{\omega}$ и имеет положительную частоту $\omega > 0$, что отвечает излучению кванта с положительной энергией $\hbar\omega > 0$. В случае $\omega < 0$, $\hbar\omega < 0$ вместо выражения (36.10) мы получили бы выражение для $\mathfrak{G}(r, t_2, a)$, аппроксимирующее опережающий потенциал:

$$\mathfrak{G}_{\text{adv}}(r, t_2, a) = \frac{\exp[i\omega(t_2 + \sqrt{r^2 - ia^2})]}{\sqrt{r^2 - ia^2}}, \quad (36.10')$$

Эта формула есть результат замыкания интеграла (36.8) в нижней полуплоскости, где имеются полюсы $t_1 = -T$, $t_1 = t_2 - \tau_2$, $\text{Im } \tau_2 > 0$.

Заметим, что если бы мы взяли очень малые L и T , то мы пришли бы к существенному нарушению макроскопической причинности. Чтобы пояснить эту мысль, достаточно рассмотреть малые T ($\omega T \approx 1$). В этом случае нельзя пренебречь в интеграле (36.8) вкладом от вычета около полюса $t_1 = +iT$. С учетом этого вклада получаем

$$\begin{aligned} \Phi(x_2) &= \frac{ie^{-\omega T}}{4\pi^2} \int \rho\left(\frac{x_1}{L}\right) d^3x_1 \frac{1}{(t_2 - iT)^2 - (r^2 - ia^2)} \approx \\ &\approx \frac{ie^{-\omega T}}{4\pi^2} \int \rho\left(\frac{x_1}{L}\right) \frac{d^3x_1}{t_2^2 - r^2}. \end{aligned} \quad (36.9')$$

Характер знаменателя в (36.9') указывает на то, что $\Phi(x_2)$ содержит симметрично опережающее и запаздывающее влияния. Тем самым нарушается макроскопическая причинность. Отсюда видно, в какой мере важна достаточная плавность источника $Q(x_1)$ в пространстве — времени для формулировки причинности: необходимо, чтобы величина ωT была много больше единицы. Это условие совпадает с условием достаточной определенности энергии источника как по ее знаку, так и по величине.

Как будет показано в § 38, формулировка нарушения микропричинности, обеспечивающая *локальность* такого нарушения, не может быть осуществлена без привлечения времениподобного вектора n (который может счи-

таться единичным, так что $n^2=1$); физический смысл этого вектора может быть весьма различен. В рассматриваемом примере роль такого вектора играет вектор (ω, \mathbf{k}) , где ω — характеристная частота источника, \mathbf{k} — характерный импульс. В частности, мы видели, что изменение знака ω сопровождается заменой запаздывающих потенциалов на опережающие.

Обратимся теперь к примеру акаузальной функции влияния, в которой вектор n вводится в явном виде в саму функцию влияния. В этом примере, как и в обычной каузальной теории, любые функции влияния могут быть получены суперпозицией запаздывающих и опережающих функций Грина с функциями D^+ и D^- .

В частности,

$$D_c(x) = D_{adv}(x) + D^-(x) = D_{ret}(x) - D^+(x), \quad (36.11)$$

и согласно (26.18), если имеется источник поля $Q(y)$, то поле $\varphi(x)$, возникающее в точке x , определяется формулой

$$\varphi(x) = \int D_c(x-y) Q(y) d^4y. \quad (36.12)$$

Вместо этих каузальных функций влияния $D_c(x)$, $D_{ret}^+(x)$, $D_{adv}^-(x)$ построим акаузальные, регулярные в вершине светового конуса. Для этого воспользуемся форм-фактором $\rho(x, n)$, в который явно вводится некоторый временноподобный единичный вектор n :

$$\rho(x, n) = \rho\left(\frac{R}{a}\right), \quad (36.13)$$

где

$$R^2 = 2(nx)^2 - x^2 \geq 0 \quad (36.14)$$

есть инвариантная положительно-дефинитная квадратичная форма переменной x^*). Мы предположим, что форм-фактор (36.13) быстро исчезает (например, экспоненциально) при $R/a \rightarrow \infty$, так что величина a имеет смысл радиуса той области, внутри которой нарушается микропричинность. Мы допустим, что этот форм-фактор не имеет в нуле сингулярности сильнее $1/R$.

*) В системе отсчета, где $n = 1, 0, 0, 0$, инвариант $R^2 = t^2 + x^2 \geq 0$.

Акаузальные функции влияния определим формулами

$$D_{\text{ret}}^+(x, a) = \int D_{\text{ret}}^+(x - \xi) \rho(\xi, n) d^4\xi, \quad (36.15)$$

$$D_{\text{adv}}^-(x, a) = \int D_{\text{adv}}^-(x - \xi) \rho(\xi, n) d^4\xi. \quad (36.15')$$

Соответственно этим формулам измененное «акаузальное» поле $\varphi(x, a)$ определится вместо (36.12) формулой

$$\varphi(x, a) = \int D_c(x - y, a) Q(y) d^4y, \quad (36.16)$$

где

$$\begin{aligned} D_c(x - y, a) &= \int D_c(x - y - \xi) \rho(\xi, n) d^4\xi = \\ &= D_{\text{ret}}(x - y, a) - D^+(x - y, a). \end{aligned} \quad (36.17)$$

Введение такого форм-фактора физически эквивалентно допущению, что каждая точка источника поля $Q(y)$ размазывается с помощью форм-фактора (36.13) в области $\mathfrak{H}(x) \approx a^4$ и, следовательно, порождает поле так, как его порождает заряд, распределенный в малой области порядка a^4 . В силу такой локализации форм-фактора $\rho(\xi, n)$ поведение акаузальной функции $D_c(x - y, a)$ при больших $|x_0 - t_0|$ и $|x - y|$, т. е. при

$$|x_0 - t_0| \gg a, \quad |x - y| \gg a, \quad (36.18)$$

асимптотически совпадает с поведением акаузальной функции $D_c(x - y)$. Тем самым доказывается выполнение условий макроскопической причинности (35.15) — (35.17').

§ 37. Пример построения акаузальной матрицы рассеяния

Мы будем исходить из предположения, что существует унитарная \hat{S} -матрица, построенная на основании локальной теории, предполагающей соблюдение условий микропричинности. Мы будем также считать, что все бесконечности устранены из этой матрицы, скажем, посредством перенормировки. Таким образом, исходная матрица \hat{S} будет содержать только матричные элементы, которые описывают реальные физические процессы. Следовательно, ее матричные элементы определены на поверхности энер-

гии (реальные частицы) и выражаются формулами вида (31.28).

Наша задача будет заключаться в нахождении акаузальной матрицы рассеяния \hat{S}_a , удовлетворяющей условиям макропричинности и условию унитарности (ср. § 35). Эту матрицу мы будем считать «близкой» к некоторой локальной матрице \hat{S} (точное значение слова «близкая» выяснится позднее). Представим теперь исходную локальную матрицу рассеяния \hat{S} в форме

$$\hat{S} = e^{i\hat{\eta}}, \quad (37.1)$$

где $\hat{\eta}$ — эрмитов оператор фазы t кой, что

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}^+. \quad (37.1')$$

Мы будем считать, что взаимодействие не сильное и допускает представление операторов \hat{S} и $\hat{\eta}$ в виде рядов по степеням константы взаимодействия g :

$$\hat{S} = \hat{I} + \sum_{n=1}^{\infty} g^n \hat{S}_n, \quad (37.2)$$

$$\hat{\eta} = \sum_{k=1}^{\infty} g^k \hat{\eta}_k. \quad (37.3)$$

Подставляя эти ряды в (37.1), найдем, что

$$\hat{S}_n = \sum_{k=1}^n \frac{i^k}{k!} \sum_{ab \dots c} (\hat{\eta}_a \hat{\eta}_b \dots \hat{\eta}_c) \delta_{a+b+\dots+c, n-k-1}, \quad (37.4)$$

где произведение $(\hat{\eta}_a \hat{\eta}_b \dots \hat{\eta}_c)$ содержит k множителей. Из (37.4), в частности, следует

$$\hat{S}_1 = i\hat{\eta}_1, \quad \hat{S}_2 = i\hat{\eta}_2 + \frac{i^2}{2!} \hat{\eta}_1^2 + \dots \quad (37.4')$$

Эти формулы выражают оператор \hat{S} через оператор $\hat{\eta}$. Существенно, что они разрешимы и в обратном направлении, так что можно выразить оператор $\hat{\eta}$ через оператор \hat{S} . Структура матричных элементов оператора $\hat{\eta}$, разумеется, совпадает со структурой матричных элементов

матрицы рассеяния (см. (31.28)), так что мы можем написать

$$\langle p' | \hat{\eta} | p \rangle = \delta^4 \left(\sum p' - \sum p \right) \frac{\eta(p', p)}{\sqrt{2p'_0 \dots 2p_0}}, \quad (37.5)$$

где $\eta(p', p)$ — инвариантная функция импульсов p и p' . Введение матрицы $\hat{\eta}$ вместо матрицы \hat{S} существенно вот в каком отношении: нарушая тем или иным способом микропричинность, можно нарушать и унитарность матрицы \hat{S} , что поведет, по всей видимости, к тяжелым последствиям. Между тем, если исходить из оператора $\hat{\eta}$, то, переходя от микропричинного оператора $\hat{\eta}$ к акаузальному $\hat{\eta}_a$, достаточно позаботиться о соблюдении новым оператором условия эрмитовости (37.1'). Эрмитовость же оператора является условием симметрии и потому легко проверяется. Тем самым гарантируется и унитарность акаузальной матрицы рассеяния \hat{S}_a . Прямая же проверка унитарности матрицы \hat{S}_a является делом весьма сложным, а может быть, и невыполнимым.

Для того чтобы иметь возможность проверить выполнение матрицей \hat{S}_a условий макропричинности, необходимо обратиться к пространственно-временному описанию, которое следует теперь сформулировать на языке оператора фазы $\hat{\eta}$. Для этого напомним, что, согласно § 35, условия макроскопической причинности формулируются для функции $\mathfrak{G}(x)$ (см. (35.18)), которая определена формулами (35.12) и (35.13). В последнюю формулу входит матричный элемент, непосредственно связанный с \hat{S} -матрицей формулами (35.2) и (35.3).

С помощью (35.2) и (35.4) можно представить функцию $T(p', p)$ в виде ряда по степеням константы взаимодействия g и по степеням величин $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots$ (см. (37.4)). Пользуясь законом умножения матриц в пространстве Лобачевского (см. (31.26)), нетрудно показать, что это разложение имеет вид

$$\begin{aligned} T(p', p) = & g\eta_1(p', p) + g^2\eta_2(p', p) + \frac{i}{2}g^2\eta_1^2(p', p) + \dots = \\ = & g\eta_1(p', p) + g^2\eta_2(p', p) + \\ + & \frac{i}{2}g^2 \int \eta_1(p', p'') \frac{d^3 p''}{2p''_0} \eta_1(p'', p) + \dots, \end{aligned} \quad (37.6)$$

где под p' следует подразумевать совокупность импульсов p_m, p_{m-1}, \dots, p_3 в конечном состоянии, а под p — совокупность импульсов в начальном состоянии p_2, p_1 (см. (35.2) и (35.3)) *).

Таким образом, формула (37.6), будучи расписана подробнее, гласит:

$$\begin{aligned} T(p_m, p_{m-1}, \dots, p_3, p_2, p_1) = & g\eta_1(p_m, p_{m-1}, \dots, p_2, p_1) + \\ & + g^2\eta_2(p_m, p_{m-1}, \dots, p_2, p_1) + \\ & + \frac{i}{2} g^2 \int \eta_1(p_m, p_{m-1}, \dots, p_2'', p_1'') \frac{d^3 p_2'' d^3 p_1''}{2p_2''^0 2p_1''^0} \dots \times \\ & \times \eta_1(p_2'', p_1'', \dots, p_2, p_1) + \dots \end{aligned} \quad (37.7)$$

Вставляя это выражение для функции T в соотношение (35.13), мы выразим функцию \mathfrak{G}_0 через матричные элементы оператора фазы $\hat{\eta}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_0(x_m, x_{m-1}, \dots, x_3, x_2, x_1) = & \\ = \int \delta^4(p_m + p_{m-1} + \dots + p_3 - p_2 - p_1) \times \\ \times \{ & g\eta_1(p_m, p_{m-1}, \dots, p_2, p_1) + g^2\eta_2(p_m, p_{m-1}, \dots, p_2, p_1) + \\ & + \frac{i}{2} g^2 \int \eta_1(p_m, p_{m-1}, \dots, p_2'', p_1'') \frac{d^3 p_2'' d^3 p_1''}{2p_2''^0 2p_1''^0} \times \\ & \times \eta_1(p_2'', p_1'', \dots, p_2, p_1) + \dots \} \times \\ \times \exp i[p_m x_m + p_{m-1} x_{m-1} + \dots + p_3 x_3 - p_2 x_2 - p_1 x_1] \times \\ \times \frac{d^3 p_m}{2p_m^0} \frac{d^3 p_{m-1}}{2p_{m-1}^0} \dots \frac{d^3 p_1}{2p_1^0}. \end{aligned} \quad (37.8)$$

Функция $\mathfrak{G}(x_m, x_{m-1}, \dots, x_2, x_1)$, трансформирующая падающую волну в рассеянную, получается из $\mathfrak{G}_0(x_m, x_{m-1}, \dots, x_2, x_1)$ путем дифференцирования по x_2^0 и x_1^0 (см. (35.12)).

Таким образом, функция $\mathfrak{G}(x_m, x_{m-1}, \dots, x_1)$, оказывается функционалом от матричных элементов $\eta_1(p', p)$, $\eta_2(p', p)$, ... оператора фазы $\hat{\eta}$. Зная свойство этих элементов и пользуясь (37.8), можно проверить выполнение условий макроскопической причинности (35.15) — (35.17').

*) Как и в § 35, мы в явном виде принимали, что в начальном состоянии имеется лишь две частицы. Обобщение на большое число частиц не представляет проблемы.

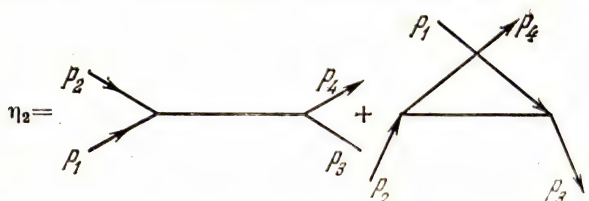
Обратимся теперь к простому примеру акаузальной матрицы \hat{S}_a . Предположим для определенности, что исходная каузальная матрица \hat{S} описывает процессы в скалярном поле $\phi(x)$, причем энергия взаимодействия имеет вид *)

$$\hat{W} = g : \hat{\phi}^3(x) :, \quad (37.9)$$

где $\hat{\phi}(x)$ есть оператор скалярного поля, g — константа взаимодействия. Пользуясь обычным методом диаграмм Фейнмана [37, 38], нетрудно показать, что описывающий рассеяние матричный элемент оператора $\hat{\eta}$ в первом порядке тождественно равен нулю

$$\eta_1 \equiv 0. \quad (37.10)$$

Матричный элемент второго порядка η_2 , описывающий рассеяние, равен матричному элементу оператора \hat{s}_2 (ср. (37.4)) и описывается суммой следующих диаграмм



$$\eta_2 = \quad (37.11)$$

Аналитическое выражение этого элемента имеет вид

$$\eta_2(p_4, p_3, p_2, p_1) = \{\bar{D}_c(p_3 - p_1) + \bar{D}_c(p_2 + p_1)\}, \quad (37.12)$$

где $\bar{D}_c(q)$ есть фурье-образ причинной функции $D_c(x)$, а q — импульс, передаваемый по внутренней линии диаграмм (37.11).

Согласно (37.8) и (37.12) для упругого рассеяния имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(x_4, x_3, x_2, x_1) = & \int \delta^4(p_4 + p_3 - p_2 - p_1) \{ \bar{D}_c(p_3 - p_1) + \\ & + \bar{D}_c(p_2 + p_1) \} \exp i(p_4 x_4 + p_3 x_3 - p_2 x_2 - p_1 x_1) \frac{d^3 p_4}{2p_4^0} \dots \frac{d^3 p_1}{2p_1^0}. \end{aligned} \quad (37.13)$$

*) Ср. дополнение VII. В этом дополнении отмечено, что система с взаимодействием $g\phi^3$ неустойчива. Однако если ограничиваться теорией возмущений, то это обстоятельство несущественно.

Предполагается, что начальное состояние частиц $\Psi_{\text{in}}(x_2, x_1)$ задано в виде волновых пакетов $u_2(x_2)$ и $u_1(x_1)$ типа, рассмотренного в § 35 (ср. (35.4)):

$$\Psi_{\text{in}}(x_2, x_1) = u_2(x_2) u_1(x_1). \quad (37.14)$$

Пользуясь теперь формулой (35.10), после длинных выкладок, приведенных в дополнении XIII, получим для рассеянных волн в случае упругого столкновения

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{out}}(x_4, x_3) = & u_2(x_4) u_1(x_3) + \\ & + i \int d^4 x d^4 y D^+(x_4 - y) D^+(x_3 - x) D_c(x - y) u_2(y) u_1(x) + \\ & + i \int d^4 x d^4 y D^+\left(x_4 - \frac{x+y}{2}\right) D^+\left(x_3 - \frac{x+y}{2}\right) \times \\ & \times D_c\left(\frac{x-y}{2}\right) u_2(x) u_1(x), \end{aligned} \quad (37.15)$$

где первый интеграл определяется первой диаграммой (37.11), а второй — второй диаграммой (37.11). Функции $D^+(x)$ определены в дополнении I формулой (I.10). D_c — причинная функция.

Выражение, полученное для рассеянной волны, основано на обычной локальной теории, в которой соблюдаются условия микропричинности.

Заменяем теперь функцию $D_c(x-y)$, входящую в выражение (37.15), акаузальной функцией $D_c(x-y, a)$:

$$D_c(x-y, a) = \int D_c(x-y-\xi) \rho(\xi, n) d^4 \xi. \quad (37.16)$$

Здесь $\rho(\xi, n)$ — форм-фактор, зависящий от некоторого единичного временного вектора n и элементарной длины a . Этот форм-фактор предполагается локализованным в области $\mathfrak{R}_4(\xi) \approx a^4$. Вектор n будет определен позднее. Как было показано в § 36, такая замена каузальной функции $D_c(x-y)$ на акаузальную $D_c(x-y, a)$ обеспечивает выполнение условий макроскопической причинности (35.15) — (35.17').

Из (37.16) следует соотношение

$$D_c(x, a) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp i p x \tilde{D}_c(p) \tilde{\rho}(p, n) d^4 p, \quad (37.17)$$

где $D_c(p)$ есть фурье-образ от функции $D_c(x)$, а $\rho(p, n)$ есть фурье-образ от функции $\rho(\xi, n)$:

$$\tilde{\rho}(p, n) = \int \rho(n) \exp i p \xi d^4 \xi. \quad (37.18)$$

В качестве примера форм-фактора $\rho(\xi, n)$ можно взять (см. [69, 72])

$$\rho(\xi, n) \approx \frac{e^{-R/a}}{R^2}, \quad (37.19)$$

где

$$R^2 = 2(\xi, n)^2 - \xi^2, \quad (37.20)$$

a — элементарная длина. Из (37.18) — (37.20) имеем

$$\tilde{\rho}(p, n) = \frac{M^2}{2(pn)^2 - p^2 + M^2}, \quad (37.21)$$

где $M = 1/a$ есть большая масса, соответствующая малой элементарной длине a . В системе, где вектор $n = (1, 0, 0, 0)$, имеем

$$\tilde{\rho}(p, n) = \frac{M^2}{p_0^2 + p^2 + M^2}. \quad (37.21')$$

Теперь обратимся к выражению (37.16) для акаузальной функции $D_c(x, a)$. Предположим, что масса частиц равна нулю. В этом случае (см. [70])

$$D_c(x) = \frac{1}{4\pi r} \delta^+(t-r) + \frac{1}{4\pi r} \delta^-(t+r), \quad (37.22)$$

где

$$\delta^\pm(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^A e^{\pm i v z} dv, \quad A \rightarrow +\infty. \quad (37.23)$$

Вычислим сперва ту часть $D_c^+(x, a)$ акаузальной функции (37.16), которая происходит от члена с $\delta^+(t-r)$ в (37.22). Заменим в интеграле

$$D_c^+(x, a) = \int D_c^+(x-\xi) \rho(\xi, n) d^4 \xi \quad (37.24)$$

t на $t-\tau$ ($t \equiv \xi_4$) и $r(x)$ на $r(x-\xi) = r(x) + \alpha \xi + \dots$, где α есть единичный вектор в направлении вектора x .

Тогда, пользуясь (37.23), находим

$$\begin{aligned} D_c^+(x, a) &= \frac{1}{8\pi^2 r} \int \rho(\xi, n) d^3\xi d\tau \int_0^A \exp[iv(t-r-\tau-\alpha\xi)] dv = \\ &= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^A \exp[iv(t-r)] \tilde{\rho}(v, v, \alpha n) dv = \\ &= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^A \exp[iv(t-r)] \frac{M^2}{2v^2 + M^2} dv = \frac{1}{8\pi^2 r} \Delta^+(t-r, A, M) \end{aligned} \quad (37.25)$$

при $A \rightarrow \infty$.

Вычисление функции $\Delta^+(t-r, \infty, M)$ проделано в дополнении XIV и ведет к результатам (XIV.10) и (XIV.11). При $|t-r| \gg a$

$$\begin{aligned} \Delta^+\left(t-r, \infty, \frac{1}{a}\right) &= \\ &= \delta^+(t-r) + O\left(\frac{2a^2}{(t-r)^3}\right) + \frac{\pi}{2} \frac{1}{a\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{|t-r|}{a\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \quad (37.26)$$

При $|t-r| \rightarrow 0$ эта функция регулярна и имеет предел

$$\Delta^+\left(0, \infty, \frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{a\sqrt{2}}. \quad (37.27)$$

Функция $\delta^+(t-r)$ имеет вид (см. (I.9))

$$\delta^+(t-r) = \frac{1}{2} \left[\delta(t-r) + \frac{i}{\pi} \frac{1}{t-r} \right]. \quad (37.28)$$

Поэтому второй член в (37.26), убывающий, как $a^2/(t-r)^3$, и третий, экспоненциальный, являются поправками к каузальной функции $\delta^+(t-r)$. Тем самым подтверждается выполнение условий макропричинности.

Теперь следует проверить выполнение условия унитарности матрицы рассеяния. Согласно (37.1) достаточно проверить эрмитовость оператора фазы $\hat{\eta}_a$. На основании

(37.12) и (37.17) имеем для акаузального оператора $\hat{\eta}_a$ вместо (37.12)

$$\eta_2(p_4, p_3, p_2, p_1) = \tilde{D}_c(p_3 - p_1) \tilde{\rho}(p_3 - p_1, n) + \tilde{D}_c(p_2 + p_1) \tilde{\rho}(p_2 + p_1, n). \quad (37.12')$$

Отсюда следует, что если потребовать выполнения соотношений

$$\tilde{\rho}(p_3 - p_1, n) = \tilde{\rho}^*(p_1 - p_3, n), \quad (37.29)$$

$$\tilde{\rho}(p_2 + p_1, n) = \tilde{\rho}^*(p_3 + p_4, n), \quad (37.30)$$

то матричный элемент $\eta(p_4, p_3, p_2, p_1)$ будет эрмитовым, если вектор n не меняется при эрмитовом сопряжении. Для этого достаточно, чтобы этот вектор был симметричен при перестановке импульсов начального (p_2, p_1) и конечного (p_4, p_3) состояний. В частности, можно положить

$$n = \frac{P}{\sqrt{P^2}}, \quad (37.31)$$

где $P = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ есть полный импульс сталкивающихся частиц. Другая возможность —

$$n = \frac{\Pi}{\sqrt{\Pi^2}}, \quad (37.32')$$

где $\Pi = p_3 + p_1$. Система отсчета, в которой вектор $\Pi = 0$, называется системой Брейта.

При симметричном выборе вектора n акаузальная матрица \hat{S}_a оказывается и унитарной, и макроскопически причинной.

Мы проводили расчет в явной форме с точностью до g^2 . Однако этот расчет может быть продолжен и на более высокие порядки разложения операторов \hat{S} и $\hat{\eta}$ по степеням g .

Поэтому результат этого раздела можно резюмировать следующим образом: если существует макропричинная и унитарная матрица рассеяния \hat{S} (по крайней мере с точностью до $O(g^N)$, где N — некоторое целое положительное число), то с той же степенью точности существует и акаузальная унитарная матрица рассеяния \hat{S}_a , удовлетворяющая принципу макроскопической причинности.

§ 38. Дисперсионные соотношения для акаузальной \hat{S}_a -матрицы

Нарушение макропричинности тотчас же отражается на аналитических свойствах матричных элементов \hat{S} -матрицы. В частности, дисперсионные соотношения для упругого рассеяния вперед, рассмотренные в § 30, уже не будут иметь места. Характер возможных изменений этих соотношений зависит от конкретной формы нарушения микропричинности. Мы рассмотрим такую форму нарушения микропричинности, которую разумно называть *минимальной*.

Пусть $T(k)$ есть амплитуда упругого рассеяния обычной, локальной теории, а $T_a(k)$ — акаузальная амплитуда того же процесса. Мы будем считать нарушения микропричинности минимальными, если: а) функция $T_a(k)$ имеет тот же спектр, что и функция $T(k)$; иными словами, если амплитуда $T(k)$ отлична от нуля в некоторой области $\mathcal{R}_s(k)$, то спектр $T_a(k)$ не выходит за пределы этой области; б) условия симметрии, свойственные амплитудам $T_{\text{ret}}(k)$ и $T_{\text{adv}}(k)$ (30.20), (30.20'), остаются в силе и для соответствующих акаузальных амплитуд $T_a(k)$:

$$T_{a \text{ ret}}(k) = T_{a \text{ adv}}(-k), \quad (38.1)$$

$$T_{a \text{ ret}}^*(k) = T_{a \text{ ret}}(-k); \quad (38.1')$$

в) степень роста $|T_a(k)|$ при $|k| \rightarrow \infty$ не превышает степени роста $|T(k)|$; г) соблюдаются условия макроскопической причинности.

Простейшая форма акаузальности (нарушения микропричинности), удовлетворяющая этим условиям, рассмотрена в работах Д. И. Блохинцева и Г. И. Колерова [69], [72], которым мы и следуем в дальнейшем.

Пусть $\tilde{T}(x)$ и $\tilde{T}_a(x)$ суть амплитуды $T(k)$ и $T_a(k)$ в координатном представлении:

$$\tilde{T}(x) = \int T(k) e^{-ikx} d^4k, \quad (38.2)$$

$$\tilde{T}_a(x) = \int T_a(k) e^{-ikx} d^4k. \quad (38.2')$$

Следуя идеям, изложенным в § 37, положим

$$\tilde{T}_a(x) = \int \tilde{T}(x - \xi) \rho(\xi, n) d^4\xi, \quad (38.3)$$

где $\rho(\xi, n)$ — форм-фактор, зависящий от некоторого времениподобного единичного вектора n . В качестве такого единичного вектора n в цитированной работе [69] принят вектор, параллельный вектору $\Pi = p' + p$, где p — импульс нуклона в исходном состоянии, а p' — его же импульс в конечном состоянии. В системе Брейта, где $p' + p = 0$, вектор n имеет компоненты $n = 1, 0, 0, 0$. Далее, мы предполагаем, как это было описано в §§ 36, 37, что форм-фактор $\rho(\xi, n)$ есть функция отношения R/a , где a — элементарная длина, а R^2 — положительно-дефинитный инвариант:

$$R^2 = 2(n\xi)^2 - \xi^2 \geq 0, \quad (38.4)$$

исчезающая достаточно быстро при $R/a \rightarrow \infty$.

$$\rho(\xi, n) \equiv \rho\left(\frac{R}{a}\right) \rightarrow 0. \quad (38.5)$$

В силу условия (38.5) из (38.3) следует, что если компоненты вектора x величины $|x_i| \gg a$ ($i = 1, 2, 3, 4$), то величину $\tilde{T}(x - \xi)$ можно вынести из-под знака интеграла, положив в ней $\xi = 0$, а интеграл от $\rho(\xi, n)$ в пространстве $\mathfrak{R}_4(\xi)$ можно нормировать на 1. Таким образом, при $|x_i| \gg a$ получается

$$\tilde{T}_a(x) \approx \tilde{T}(x), \quad (38.6)$$

что и следует рассматривать как соблюдение макропричинности.

Переходя в (38.3) к импульсному представлению, получим

$$T_a(k) = T(k) \tilde{\rho}(k, n), \quad (38.7)$$

где $\tilde{\rho}(k, n)$ есть фурье-образ форм-фактора $\rho(\xi, n)$. Если $\rho(\xi, n)$ есть функция R/a , то нетрудно показать, что $\tilde{\rho}(k, n)$ будет функцией инварианта

$$I = 2(kn)^2 - k^2 \geq 0. \quad (38.8)$$

Из (38.7) следует, что условие спектральности а) соблюдается автоматически. Условия симметрии б) будут также выполнены, если

$$\tilde{\rho}(k, n) = \tilde{\rho}(-k, n), \quad (38.9)$$

$$\tilde{\rho}^*(k, n) = \tilde{\rho}(-k, n), \quad (38.9')$$

т. е. если $\tilde{\rho}(k, n)$ есть четная и действительная функция вектора k . Наконец, условие в) не будет нарушено, если функция $\tilde{\rho}(k, n)$ при $|k| \rightarrow \infty$ ограничена.

Соблюдения условий а), б), в) и г) достаточно, чтобы вывести дисперсионные соотношения для акаузальной амплитуды $T_a(k)$ совершенно таким же путем, которому следуют при выводе дисперсионных соотношений в обычной каузальной теории (ср. § 30). Поэтому в случае минимальной акаузальности мы можем выписать дисперсионные соотношения для амплитуды упругого рассеяния вперед $T_a(\omega)$, прямо используя формулу (30.30), с той только разницей, что при обходе по бесконечно удаленному кругу мы должны учесть особенности, возникающие за счет форм-фактора $\tilde{\rho}(k, n) = \tilde{\rho}(\omega)$. Тогда вместо соотношения (30.29) мы получим более общее:

$$T_a(\omega) = T(\omega) + \psi(\omega), \quad (38.10)$$

где $T(\omega)$ равно (30.29) с учетом (30.30), а дополнительный член $\psi(\omega)$ имеет вид

$$\psi(\omega) = (\omega - \omega_0)^{m+1} \sum_{s=1}^f \text{Res} \frac{T_a(\omega_s)}{\omega_s - \omega_0}, \quad (38.11)$$

причем сумма взята по особенностям (полюсам) функции $\rho(\omega)$, а $A_a(\omega)$ — мнимая (абсорбционная) часть амплитуды $T_a(\omega)$ (см. (30.30)).

Из действительности и четности функции $\rho(\omega)$ следует, что если она имеет полюс в точке $\omega = \omega_s$, то она имеет полюс и в точке $\omega = -\omega_s$. Эти полюсы не могут лежать на действительной оси, так как в этом случае они описывали бы реальные состояния. Поэтому они должны обязательно иметь мнимую часть $\text{Im} \omega_s \neq 0$, и притом достаточно большую. Положим $|\text{Im} \omega_s| \approx 1/a$, где a — элементарная длина.

Если величина a мала и в рассматриваемой области энергия ω невелика, так что $\omega \ll 1/a$, то мы можем замкнуть контур интегрирования (см. рис. 33) кругом радиуса R таким, что $R < 1/a$, но все же столь большим, что можно пренебречь вкладом в интеграл от интегрирования по этому кругу. Очевидно, что при этих условиях мы получим обычные каузальные дисперсионные соотно-

шения. При $R > 1/a$ возникнут дополнительные акаузальные члены.

Если элементарная длина a достаточно мала, то акаузальная матрица \hat{S}_a отличается от каузальной матрицы \hat{S} только в области энергий $\omega \gg 1/a = M$. Поэтому при $M \rightarrow \infty$ матрица \hat{S}_a оказывается «близкой» к исходной каузальной матрице \hat{S} . Такую матрицу \hat{S}_a мы называем *почти локальной* или *почти каузальной*.

В заключение этого раздела выпишем дисперсионные соотношения для πN -рассеяния вперед с учетом акаузальности рассматриваемого вида. Для определенности положим

$$\rho(\omega) = \frac{M^2}{M^2 + \omega^2}, \quad M = \frac{1}{a}. \quad (38.12)$$

Эти соотношения будут отличаться от каузальных соотношений дополнительными членами $\psi(\omega)$, проистекающими от вычетов функции $\bar{\rho}(\omega)$ в точках $\omega = \pm iM$.

Именно, в отличие от формул (30.32) — (30.32''), будем иметь

$$D_{a0}(\omega) - D_{a0}(\omega_0) = \frac{g^2}{M^2} \omega_g^2 \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_g^2)(\omega_0^2 - \omega_g^2)} + \\ + \frac{2}{\pi} (\omega^2 - \omega_0^2) \oint_m^\infty \frac{\omega' A_{a0}(\omega') d\omega'}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_0^2)} + \psi_0(\omega), \quad (38.13)$$

$$D_{a1}(\omega) - D_{a1}(\omega_0) = \frac{2g^2}{M} \frac{\omega_g(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_g^2)(\omega_0^2 - \omega_g^2)} + \\ + \frac{2}{\pi} \oint_m^\infty \frac{\omega' A_{a1}(\omega') d\omega'}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_0^2)} + \psi_1(\omega), \quad (38.13')$$

$$[D_{a2}(\omega) - D_{a2}(\omega_0)] \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{g^2}{M} \frac{\omega_g(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_g^2)(\omega_0^2 - \omega_g^2)} + \\ + \frac{2}{\pi} \omega (\omega^2 - \omega_0^2) \oint_m^\infty \frac{A_{a2}(\omega') d\omega'}{(\omega'^2 - \omega^2)(\omega'^2 - \omega_0^2)} + \psi_2(\omega), \quad (38.13'')$$

где амплитуды $D_{a0}(\omega)$, $D_{a1}(\omega)$, $D_{a2}(\omega)$, $A_{a0}(\omega)$, $A_{a1}(\omega)$, $A_{a2}(\omega)$ имеют тот же смысл, что и амплитуды каузаль-

ной теории в формулах (30.32) — (30.32"), а дополнительные члены равны

$$\psi_0(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{M^2 + \omega_0^2} \tilde{\rho}(\omega) d_0(iM), \quad (38.14)$$

$$\psi_1(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{M^2 + \omega_0^2} \tilde{\rho}(\omega) d_1(iM), \quad (38.14')$$

$$\psi_2(\omega) = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{M^2 + \omega_0^2} \tilde{\rho}(\omega) d_2(iM), \quad (38.14'')$$

где d_0, d_1, d_2 — некоторые константы, равные значениям величин

$$d_0 = \frac{D_{a1}(\omega)}{\tilde{\rho}(\omega)}, \quad d_1 = \frac{D_{a1}(\omega)}{\tilde{\rho}(\omega)}, \quad d_2 = \frac{D_{a2}(\omega)}{-\tilde{\rho}(\omega)}$$

в точке $\omega = iM$.

Как видно из этих формул, дополнительные члены существенны только при частотах $\omega \geq M$.

ОБОБЩЕНИЕ ПРИЧИННОЙ СВЯЗИ
И ГЕОМЕТРИИ

§ 39. Две возможности обобщения

В современной теории предполагается, что геометрия, известная нам из макроскопической физики, сохраняет свою значимость и в области микромира. Вместе с этой геометрией в область микромира переносится и та форма причинной связи, которая установлена на основе изучения макроскопических явлений.

Две физические идеи лежат в основе современной концепции:

а) идея об однородном и изотропном пространстве — времени Эйнштейна — Минковского и

б) идея о переносе взаимодействия физическими полями (электромагнитным полем, полями мезонным, нейтронным и т. п.)

Последовательное применение этих идей в физике элементарных частиц в области особо малых промежутков времени и особо малых расстояний приводит к физически нелепым выводам: энергия взаимодействия частиц на малых расстояниях и их собственная энергия оказываются бесконечно большими. Этот нежелательный результат возникает как в квантовой, так и в классической физике и, возможно, указывает на общее для обеих концепций происхождение трудностей.

Остановимся подробнее на этой стороне дела. В классической физике распространение слабого (линейного) сигнала из мировой точки $P(x_1)$ в мировую точку $P(x_2)$ определяется функцией Грина \mathcal{G} (см. § 25). Постараемся построить эту функцию, исходя из наиболее общих предположений, относящихся к геометрии и причинности.

Из предположения об однородности пространства и времени следует, что функция Грина может быть функцией только разности координат точек $Q(x_1)$ и $P(x_2)$, т. е. функцией разностей $x = x_2 - x_1$ и $t = t_2 - t_1$.

Требование изотропности пространства — времени приводит к дальнейшему ограничению: функция \mathfrak{G} должна зависеть не просто от разностей $x_2 - x_1$, $t_2 - t_1$, но от четырехмерного интервала $x^2 = t^2 - x^2 = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$. Наконец, оказывается еще возможным ввести направление времени $\varepsilon = t/|t| = \pm 1$ для $x^2 > 0$ и направление по пространственному лучу $\eta = x/|x| = \pm 1$ для $x^2 < 0$.

Таким образом, функцию Грина можно представить в виде

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(x^2, \varepsilon, \eta). \quad (39.1)$$

Такая функция является инвариантом собственного преобразования Лоренца, но может не сохраняться при дискретных преобразованиях T (инверсия времени) и P (инверсия в пространстве).

Связь между мировыми точками $P(x_1)$ и $P(x_2)$ выражается с помощью функции Грина в форме *)

$$\varphi(x_2) = \int \mathfrak{G}(x^2, \varepsilon, \eta) Q(x_1) d^4x_1, \quad (39.2)$$

где $\varphi(x_2)$ есть поле в точке $P(x_2)$, а $Q(x_1)$ есть источник этого поля, сосредоточенный около точки $P(x_1)$. Аналогичным образом можно написать поле $\varphi(x_1)$, возникающее в точке $P(x_1)$ под действием источника $Q(x_2)$, сосредоточенного в окрестности точки $P(x_2)$. Связь, выраженная в (39.2), еще не гарантирует выполнения релятивистского принципа причинности, который: а) ограничивает скорость распространения всех взаимодействий верхним пределом скорости света и б) требует, чтобы причина (источник Q , помещенный в точке $P(x_1)$) вызывала следствие (поле φ в точке $P(x_2)$) в более поздний момент времени, т. е. $t_2 > t_1$. Для того чтобы удовлетворить этим требованиям, найдем вариацию поля $\varphi(x_2)$ в точке $P(x_2)$ при варьировании источника $Q(x_1)$ в произвольной точке $P(x_1)$ или, что удобнее, вычислим непосредственно функциональную производную от поля $\varphi(x_2)$ по источнику $Q(x_1)$ (см. дополнение IX). Из (39.2) имеем

$$\frac{\delta \varphi(x_2)}{\delta Q(x_1)} = \mathfrak{G}(x^2, \varepsilon, \eta). \quad (39.3)$$

*) Ср. § 25.

Отсюда видно, что требования а) и б) будут соблюдены, если на функцию Грина наложить следующие дополнительные ограничения:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(x^2, +1), \quad \text{если } x^2 > 0, \varepsilon = +1, \quad (39.4)$$

$$\mathfrak{G} = 0, \quad \begin{cases} \text{если } x^2 > 0, \varepsilon = -1, & (39.4') \\ \text{если } x^2 < 0, \varepsilon = \pm 1 & (39.4'') \end{cases}$$

(параметр η теперь не входит в функцию \mathfrak{G} , так как она равна нулю при $x^2 < 0$).

При соблюдении условий (39.4)—(39.4'') релятивистские требования причинности уже удовлетворены, но это еще не значит, что функция \mathfrak{G} описывает какое-либо физическое поле. Для того чтобы функцию \mathfrak{G} можно было рассматривать как некоторое физическое поле *), создаваемое импульсными источниками, необходимо, чтобы оно подчинялось линейному неоднородному дифференциальному уравнению

$$\hat{L}\mathfrak{G}(x^2) = Q(x_1), \quad (39.5)$$

где источник $Q(x_1)$ имеет вид точечного импульса:

$$Q(x_1) = \delta^4(x_1) = \delta^3(\mathbf{x}_1) \delta(t_1). \quad (39.6)$$

Линейный характер оператора \hat{L} вытекает из предположения о *слабости* рассматриваемого сигнала, а импульсный характер источника Q соответствует обычному определению функции Грина как элементарного сигнала, вызванного возмущением в окрестности только одной точки $P(x_1)$.

В силу предполагаемой релятивистской инвариантности оператор \hat{L} должен быть функцией даламбертиана $\square = -\partial^2/\partial t^2 + \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, так что

$$\hat{L} \equiv L(\square). \quad (39.7)$$

Функция L может быть или многочленом, или бесконечным рядом:

$$L(z) = \sum_{n=0}^N \frac{C_n z^n}{2n!}; \quad (39.8)$$

*) Поэтому возможно обобщенное взаимодействие, не сводящееся к концепции физического поля; такого рода взаимодействия изучались в работах автора [24, 74—77].

здесь N конечно или бесконечно. В последнем случае оператор $L(\square)$ может оказаться нелокальным, т. е., действуя на некоторую функцию $f(x)$, он будет воспроизводить функцию в некоторой другой смешанной точке $\varphi(x')$, $x' \neq x^*$). Фурье-образ функции (39.4)–(39.4'') есть функция инварианта $k^2 = \omega^2 - k^2$:

$$\mathfrak{G}(x^2, +1) = \int \tilde{\mathfrak{G}}(k^2) e^{ikx} d^4x, \quad (39.9)$$

где $kx = \omega t - kx$. Подставляя (39.9) в (39.5), найдем

$$\hat{L}(k^2) \tilde{\mathfrak{G}}(k^2) = 1. \quad (39.10)$$

Отсюда следует, что нули функции $L(k^2)$ являются полюсами функции Грина $\mathfrak{G}(k^2)$ **). Эти полюсы ведут к сингулярностям функции $\mathfrak{G}(x^2)$ на световом конусе $x^2 = 0$. В дополнении I, где выполнено фурье-преобразование (39.9) для фурье-образов $\tilde{\mathfrak{G}}(k^2)$, имеющих полюс первого порядка, показано, что эти сингулярности имеют вид $\delta(x^2)$, $\ln x^2$, $1/x^2$.

Можно было бы допустить, что ситуация в вершине светового конуса меняется в том смысле, что обычные геометрические соотношения теряют свою силу из-за изменения самой природы явлений, разыгрывающихся на малых расстояниях и на малых промежутках времени. В этом смысле следовало бы ожидать существования некоторой «элементарной длины» a , которая характеризовала бы масштаб, ограничивающий применение обычных причинных соотношений со стороны больших $|x|$ и $|t|$, по мере приближения $|x|$, $|t|$ по величине к масштабу a . На возможное значение такого масштаба для физики элементарных частиц впервые было указано в работах Г. В. Ватагина [82] и М. А. Маркова [83].

Позднее идея о существовании масштаба, ограничивающего область применимости современной квантовой

*) На это обстоятельство было указано в работе [74]. В работе [78] доказано, что это различие зависит от поведения предела $|C_n|^{1/n}$ при $n \rightarrow \infty$. Нелокальный оператор из класса (39.8) был использован для построения варианта нелокальной теории поля, свободной от расходимостей [79].

**) Уравнения типа (39.5) были рассмотрены в работах [80, 81]. При этом была обнаружена трудность, заключающаяся в том, что при $N > 1$ тензор импульса-энергии частиц становится неопределенным.

теории и, может быть, и теории относительности, неоднократно воскресала в различных формах, и по сию пору теоретическая мысль постоянно возвращается к ней.

Важнейшим обстоятельством в связи с представлением об элементарной длине является факт недефинитности метрики пространства Эйнштейна—Минковского. В той области многообразия $\mathfrak{H}_4(x)$, где применимость псевдоевклидовой геометрии не вызывает сомнений, не существует никакого понятия близости двух событий $P(x_1)$ и $P(x_2)$, кроме выражаемого условием $x^2 = 0$. Это условие означает лишь то, что точки $P(x_1)$ и $P(x_2)$ могут быть соединены световым сигналом, разделяющие же их пространственные $r = |x_2 - x_1|$ и временные $t = t_2 - t_1$ промежутки могут быть как угодно велики. Можно сказать, что равенство $x^2 = 0$ «не знает», почему оно выполняется: по той ли причине, что обе величины r и t порознь велики, но $r = t$, или по той причине, что $r = 0$ и $t = 0$! [24].

Допустим теперь, что релятивистский принцип причинности выполняется лишь приближенно, и предположим сперва, что это относится к пункту а), ограничивающему скорость распространения сигналов скоростью света. При таком предположении функция $\mathfrak{G}(x^2, \varepsilon, \eta)$ уже не обязана исчезать вне светового конуса, так что условие (39.4) теперь не выполняется: $\mathfrak{G}(x^2, \varepsilon, \eta)$ при отказе от предположения а) не исчезает в пространственной области. Вместе с тем появляется возможность взаимодействий, которые отличают направление по лучу ($\eta = \pm 1$) и, следовательно, не сохраняют четность.

Отклонение $\mathfrak{G}(x^2, \varepsilon, \eta)$ от условий (39.4)—(39.4'') не должно быть слишком значительным: для больших промежутков времени $|t| \gg a$, где a —элементарная длина, условие (39.4') должно выполняться с большой степенью точности. Введем эту элементарную длину явно в выражение $\mathfrak{G}(x^2, \varepsilon, \eta)$:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}\left(x^2, \varepsilon, \eta, \frac{x^2}{a^2}\right), \quad (39.9')$$

и будем считать, что при $\left|\frac{x^2}{a^2}\right| \rightarrow \infty$

$$\mathfrak{G}\left(x^2, \varepsilon, \eta, \frac{x^2}{a^2}\right) \rightarrow \mathfrak{G}(x^2, \varepsilon), \quad (39.9'')$$

где $\mathfrak{G}(x^2, \varepsilon)$ — функция Грина каузальной теории (т. е. исчезающая вне светового конуса). Соответствие требует, чтобы при $|x^2/a^2| \gg 1$ функция влияния \mathfrak{G} (39.9) становилась бы исчезающе малой. При соблюдении этого условия сигнал, приходящий из точки $P(x_1)$ в $P(x_2)$, будет распространяться со скоростью $\mathbf{v} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)/(t_2 - t_1) = \mathbf{x}/t$, практически равной скорости света $c = 1$.

В самом деле, из условия

$$|x^2| = |t^2 - \mathbf{x}^2| \leq a^2 \quad (39.11)$$

следует, что

$$|1 - \mathbf{v}^2| < \frac{a^2}{t^2}, \quad (39.12)$$

так что при $|t| \gg a$ будет $\mathbf{v}^2 = 1$. Это условие является релятивистски инвариантным. Действительно, в системе отсчета, движущейся относительно первой вдоль оси Ox со скоростью u , имеем

$$x' = \gamma(x - ut), \quad t' = \gamma(t - ux), \quad \gamma = (1 - u^2)^{-1/2}. \quad (39.13)$$

Следовательно,

$$|1 - \mathbf{v}'^2| \leq \frac{a^2}{t'^2} = \frac{a^2(1 - u^2)}{t^2(1 - uv)^2}, \quad (39.14)$$

где $\mathbf{v}' = \mathbf{x}'/t'$. Если $|\mathbf{x}|$, $|t| \sim a$ и $|u|$ мало, то $|\mathbf{x}'|$ и $|t'|$ также $\sim a$ при $u \approx 1$. Из (39.14) опять следует близость $|\mathbf{v}'|$ к 1, кроме точки $1 - uv = 0$. Однако в этой точке

$$t' = 0, \quad x' = \gamma tv(1 - u^2) = \frac{t}{u} \sqrt{1 - u^2},$$

так что $|t'|$ и $|\mathbf{x}'|$ малы (порядка a). Если же $|t'|$ и $|\mathbf{x}'| \gg a$, то из (39.14) следует $\mathbf{v}'^2 \approx 1$.

Таким образом, нарушив закон распространения сигнала в области $|\mathbf{x}|$, $|t| \sim a$, мы можем все же сохранить ограничение $|\mathbf{v}| \leq c = 1$ для $|\mathbf{x}|$ и $|t| \gg a$, т. е. для макроскопических масштабов [85].

Особого рассмотрения требует второе условие причинности (б), согласно которому $t_2 > t_1$, так что $\varepsilon = +1$ (см. (39.4)). Трудность заключается в том, что различие между $\varepsilon = +1$ и $\varepsilon = -1$ имеет смысл только внутри светового конуса $x^2 > 0$ и не может быть сформулировано для функций Грина, отличных от нуля вне светового

конуса, т. е. при $x^2 < 0$. Поэтому предельный переход (39.9'') с соблюдением запаздывающего характера взаимодействия ($\varepsilon = +1$) не может быть осуществлен последовательно.

Происхождение этой трудности прямым образом связано с неопределенностью метрики в пространстве Эйнштейна—Минковского, с отсутствием там понятия близости двух пространственно-временных точек.

Эта трудность может быть преодолена только при учете существования материи, в частности материальных источников поля.

Суть дела заключается в том, что для определения понятия близости двух точек $P(x_1)$ и $P(x_2)$ в пространстве Эйнштейна—Минковского помимо радиуса-вектора ($x = x_2 - x_1$, $t_2 - t_1 = t$), соединяющего мировые точки $P(x_1)$ и $P(x_2)$, необходимо еще иметь какой-либо второй времениподобный вектор n (этот вектор без ограничений мы можем считать единичным, $n^2 = 1$ *). С помощью такого вектора кроме инвариантов x^2 , $n^2 = 1$ мы можем еще образовать инвариант (xn) и с его помощью построить положительно-дефинитную величину (также инвариант):

$$R^2 = 2(xn)^2 - x^2 \geq 0. \quad (39.15)$$

В системе отсчета, где $n = (1, 0, 0, 0)$, инвариант R^2 превращается в сумму квадратов:

$$R^2 = r^2 + t^2, \quad (39.15')$$

т. е. в положительно-дефинитное евклидово расстояние между точками $P(x_1)$ и $P(x_2)$. С помощью этого «расстояния» понятие близости между двумя мировыми точками $P(x_1)$ и $P(x_2)$ может быть определено следующим образом: точки $P(x_1)$ и $P(x_2)$ считаются близкими, если

$$R \leq a, \quad (39.16)$$

и удаленными, если

$$R \geq a, \quad (39.17)$$

Такова формальная сторона дела. Физический смысл времениподобного вектора n может быть весьма различным. Следует различать два принципиально различных

*) Такого рода вектор уже использовался нами при исследовании причинности (см. (37.24) и (38.4)).

класса векторов n : а) вектор n связывается с движением материи, расположенной в точках $P(x_1)$ и $P(x_2)$, например, этот вектор может быть тождествен четырехмерной скорости U_Q движения источника поля Q , находящегося в точке $P(x_1)$, или скорости U_A приемника поля, находящегося в точке $P(x_2)$, или скорости их центра масса U_m .

Во всех этих случаях вектор n связывается с движением материи, расположенной в точках $P(x_1)$, $P(x_2)$. В этом случае вектор n мы будем называть *внутренним*. Введение в теорию внутреннего вектора n сохраняет все соотношения теории относительности для свободных частиц, не приводит к нарушению однородности и изотропности пространства или к выделению какой-либо преимущественной системы отсчета.

Другая возможность (б) заключается в том, что вектор n выделяет какую-то преимущественную систему отсчета. В этом случае мы будем называть вектор n *внешним*. Такой вектор может быть связан с какими-либо выделенными системами отсчета [105], например с системой отсчета, сопутствующей движению материи в расширяющейся Вселенной*), или с системой, связанной с физическим вакуумом (если этот вакуум рассматривать в духе старого понимания эфира); это может быть система, связанная с дискретным, квантованным пространством [94, 104], или система отсчета наблюдателя [91].

В заключение заметим, что эйнштейновское толкование переменных x и t теряет свою значимость во всех случаях акаузальности, так как в области $|x|, |t| \approx a$ нет сигнала, который имел бы стандартную скорость $c=1$.

Однако это обстоятельство не должно нас смущать, так как конечные размеры реальных частиц и без того исключают возможность измерить переменные x и t внутри частиц и тем самым ставится под сомнение физическая реальность этих переменных: пространственно-временное описание структуры частиц может быть не менее иллюзорным, чем классические орбиты электронов внутри атомов.

*) Эта классификация возможных типов вектора n введена в работах [69, 72].

§ 40. Евклидова геометрия в микромире

В этом разделе мы рассмотрим модель причинной связи, которая на больших расстояниях сводится к обычной причинной связи, основанной на принципе постоянства скорости света в пустоте, а на малых расстояниях настолько меняет свой характер, что скорость распространения светового сигнала может стать мнимой. Первый тип причинной связи соответствует псевдоевклидовой геометрии пространства Эйнштейна — Минковского, второй тип — евклидовой геометрии четырехмерного пространства.

Такая модель не должна казаться ни слишком странной, ни даже слишком фантастичной, если вспомнить, например, особенности нелинейной теории поля.

В § 7 было показано, что при определенных условиях, в области большого поля ϕ и больших градиентов этого поля $p = \frac{\partial \phi}{\partial t}$, $q = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, характеристики уравнений поля могут стать мнимыми. Вместе с тем возникает то, что мы называли «комком» событий: совокупность реальностей, связанных между собою, однако не вытекающих друг из друга. Иными словами, такие реальности не могут быть упорядочены во времени: понятия «раньше» и «позже» для них не существуют. Вообще разумно заметить, что если элементарная частица не разложима на составные части, которые могли бы быть соединены световыми сигналами, то нет никаких оснований предполагать, что причинная связь внутри элементарных частиц или в тесных комплексах этих частиц, возникающих в течение соударения, будет такой же, какая характерна для событий, отделенных друг от друга расстояниями, существенно превосходящими размеры элементарных частиц.

В дальнейшем мы и будем рассматривать именно такие комплексы, которые по установившейся у экспериментаторов терминологии будем называть «событиями» или «звездами». Каждое такое «событие» или «звезда» характеризуется ее лучами, которые на математическом языке описываются импульсами p_k входящих и выходящих частиц (для N -лучевой звезды $k = 1, 2, \dots, N$) *); эти импульсы (векторы) можно в пределах комплекса пере-

*) Мы здесь несколько расширяем понятие N -лучевой звезды, включая в число ее лучей также и нейтральные частицы.

нести параллельно самим себе так, что все они будут исходить из одной точки, например из центра масс. Эту точку назовем «фокусом» события.

Положение фокуса нарушает однородность вакуума, а векторы p_k выделяют определенные направления, которые нарушают его изотропность; однако мы будем допускать, что «звезда» как целое может быть смещена в пространстве и времени на любую величину и повернута любым образом без того, чтобы внутри нее что-либо изменилось.

Это означает, что вакуум сам по себе мы считаем однородным и изотропным, и только существование «звезды» *de facto* выделяет в нем избранную точку («фокус звезды») и избранные направления — направления ее лучей p_k .

Обратимся теперь к математической формулировке этих идей. В современной локальной теории взаимодействия частиц описывается функциями $s(x_1, x_2, \dots, x_N)$ в разложении матриц \hat{S} по степеням операторов поля $\varphi(x)$ (см. § 29). Матричный элемент от такой коэффициентной функции

$$\langle p_N, p_{N-1}, \dots, p_{N-m} | s(x_1, x_2, \dots, x_N) | p_{N-m-1}, p_{N-m-2}, \dots, p_2, p_1 \rangle = \int d^4x_N \dots d^4x_1 s(x_1, x_2, \dots, x_N) \times \\ \times \exp i(p_N x_N + \dots + p_{N-m} x_{N-m} - p_{N-m-1} x_{N-m-1} - \dots - p_1 x_1) \quad (40.1)$$

равен амплитуде вероятности перехода частиц из начального состояния, характеризуемого импульсами $p_1, p_2, \dots, p_{N-m-1}$, в конечное состояние, характеризуемое импульсами p_{N-m}, \dots, p_N .

Функции $s(x_1, x_2, \dots, x_N)$ трансляционно инвариантны. Выразим это свойство в явной форме. Для этого введем вместо координат x_1, x_2, \dots, x_N новые, связанные с ними линейными преобразованиями:

$$X_\alpha = \sum_k A^k x_\alpha^k \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4), \quad (40.2)$$

$$\sum_k A^k = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (40.2')$$

$$\xi_\alpha^i = \sum_k a^{ik} x_\alpha^k \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4), \quad (40.3)$$

$$\sum_k a^{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (40.3')$$

Операция трансляции $\hat{T}(d)$:

$$\hat{T}(d)x = x + d, \quad (40.4)$$

в силу условий (40.2') и (40.3') дает

$$\hat{T}(d)X = X + d, \quad (40.5)$$

$$\hat{T}(d)\xi = \xi. \quad (40.6)$$

Таким образом, при трансляции $\hat{T}(d)$ пространство $\mathfrak{R}_4(X)$ смещается на величину d , а пространство $\mathfrak{R}(\xi)$ тождественно переходит само в себя.

При однородных преобразованиях Лоренца эти пространства также преобразуются независимо друг от друга. Действительно, выполним в (40.2) и (40.3) преобразование Лоренца $\bar{x} = \hat{L}x$, где \bar{x} — новые координаты. Подробнее это преобразование запишется в виде

$$\bar{x}_\alpha^k = L_{\alpha\beta} x_\beta^k, \quad (40.7)$$

где $L_{\alpha\beta}$ суть матричные элементы матрицы \hat{L} . Из (40.7), (40.2) и (40.3) получим

$$\bar{X}_\alpha = \sum_{k=1}^N A^k L_{\alpha\beta} x_\beta^k = L_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^N A^k x_\beta^k = L_{\alpha\beta} X_\beta \quad (40.8)$$

и

$$\bar{\xi}_\alpha^i = \sum_{k=1}^N a^{ik} L_{\alpha\beta} x_\beta^k = L_{\alpha\beta} \sum_{k=1}^N a^{ik} x_\beta^k = L_{\alpha\beta} \xi_\beta^i, \quad (40.9)$$

или, в короткой записи,

$$\bar{X} = \hat{L}X, \quad \bar{\xi}^i = \hat{L}\xi^i. \quad (40.10)$$

Иными словами, при преобразовании Лоренца пространства $\mathfrak{R}_4(x)$ и $\mathfrak{R}_4(\xi)$ преобразуются порознь, каждое внутри себя. Если теперь совершить преобразования (40.2) и (40.3) над переменными x_1, x_2, \dots, x_N , то функция s окажется зависящей только от переменных ξ :

$$s(x_1, x_2, \dots, x_N) \rightarrow s(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}), \quad (40.11)$$

т. е. она определена в пространстве относительных переменных $\mathfrak{R}_{4N-4}(\xi)$.

Далее, эта функция, будучи сама по себе инвариантом лоренцевского преобразования, зависит лишь от скалярных произведений

$$I^{ik} = \xi^i \xi^k = g_{\alpha\beta} \xi_\alpha^i \xi_\beta^k \quad (i, k = 1, 2, \dots, N-1). \quad (40.12)$$

Здесь

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \neq \beta, \\ +1, -1, -1, -1 & \text{при } \alpha = \beta, \end{cases}$$

так что позволительно написать

$$s(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}) \equiv s(\dots, \xi_i, \dots) = \\ = s(I^{12}, I^{13}, \dots, I^{ik}, \dots) \equiv s(\dots, I^{ik}, \dots). \quad (40.13)$$

При этом следует иметь в виду, что из всех $N(N-1)/2$ инвариантов I^{ik} имеется только $(4N-10)$ независимых.

Таким образом, функция s определена в пространстве $\mathcal{R}_{4N-4}(\xi)$ и является функцией скалярных произведений I^{ik} .

Предположим теперь, что характерная для локальной теории причинная связь меняется в окрестности элементарных частиц. Как было разъяснено в § 39, для определения понятия окрестности необходимо нарушение изотропности пространства—времени, что формально может быть осуществлено путем введения в функцию $s(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1})$ времениподобных векторов n .

Такая возможность возникает в реальной «звезде», так как самым фактом своего существования «звезда» нарушает изотропность пространства и времени. В частности, любой из векторов n_k ($n_k^2 = 1$, $n_{k0} > 0$), определяющих направление лучей звезды:

$$n_k = \frac{p_k}{\sqrt{p_k^2}}, \quad \text{где } k = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (40.14)$$

может быть принят в качестве необходимого нам вектора n . Могут быть также использованы их линейные комбинации, например вектор, определяющий направление движения фокуса звезды *):

$$n = \frac{P}{\sqrt{P^2}}, \quad P = \sum_{k=1}^N p_k. \quad (40.15)$$

*) Ср. §§ 37, 39.

Учет анизотропии пространства — времени, обусловленной анизотропией реальной звезды, позволяет обобщить коэффициентные функции $s(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1})$ таким образом, чтобы внести в них явную зависимость от направления мировых линий лучей, например:

$$s(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}; n_1, n_2, \dots, n_{N-1}) \quad (40.16)$$

или, в более частном случае,

$$s(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}; n). \quad (40.17)$$

Тем самым вводятся новые инварианты типа

$$R^{ii} = 2(n\xi^i)^2 - \xi^{i2} \geq 0 \quad (40.18)$$

и

$$R^{ik} = 2(n\xi^i)(n\xi^k) - \xi^i\xi^k \quad (40.19)$$

или безразмерные инварианты

$$\xi^{ik} = \frac{R^{ik}}{a^2}, \quad (40.20)$$

где a — элементарная длина. Сохраняя релятивистскую инвариантность «события» в целом, мы можем, используя векторы n , помимо инвариантов I^{ik} (40.12) допустить зависимость функций $s(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}; n)$ от инвариантов $R^{ik}(\xi, n)$ (40.18) и (40.20). Мы выберем эту зависимость следующим образом: заменим скалярные произведения (40.12) более общими, именно положим

$$I_a^{ik} = a(z) I^{ik} + b(z) R^{ik}, \quad (40.21)$$

где

$$z = \frac{1}{2}(\xi^{ii} + \xi^{kk}), \quad (40.22)$$

а инварианты I^{ik} и R^{ik} определены формулами (40.13) и (40.19).

Релятивистская инвариантность коэффициентной функции $s(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}; n)$ при введении инвариантов I_a^{ik} вместо инвариантов I^{ik} полностью сохраняется.

Однако может быть нарушена макроскопическая причинность. Чтобы избежать этой катастрофы, выберем функции $a(z)$ и $b(z)$ таким образом, что при $z \rightarrow 0$

$$a(z) \rightarrow 0, \quad b(z) \rightarrow 1, \quad (40.23)$$

а при $z \rightarrow \infty$

$$a(z) \rightarrow 1, \quad b(z) \rightarrow 0. \quad (40.23')$$

Далее следует заметить, что мы понимаем «окрестность элементарной частицы» как малость величин $|x_i - x_k|$:

$$|x_i - x_k| \ll a. \quad (40.24)$$

Это условие в общем случае вовсе не совпадает с условием малости инвариантов (40.18)—(40.20), которое означает малость величин $|\xi^i|$:

$$|\xi^i| \ll a. \quad (40.25)$$

Согласие между этими условиями может быть достигнуто только при специальном выборе переменных ξ_i , если принять

$$\xi_1 = x_1 - x_2, \quad \xi_2 = x_2 - x_3, \quad \dots, \quad \xi_{N-1} = x_{N-1} - x_N. \quad (40.26)$$

При соблюдении условий (40.23), (40.23') и (40.26) возникает ситуация, когда при $z \rightarrow \infty$ мы будем иметь дело с обычной причинной связью, так как в этом случае $I_a^{ik} \rightarrow I^{ik}$; однако при $z \rightarrow 0$ $I_a^{ik} \rightarrow R^{ik}$, так что обычная причинная связь будет полностью разрушена: вместо последовательности событий мы будем иметь дело с их «комком», не упорядочивающимся во времени. Действительно, в этом последнем случае в системе отсчета, где $n = (1, 0, 0, 0)$, инвариант I_a^{ik} принимает вид

$$I_a^{ik} = R^{ik} = \sum_{\alpha=1}^4 \xi_\alpha^i \xi_\alpha^k, \quad (40.27)$$

характерный для евклидовой геометрии.

Вместе с тем возникает новая симметрия: при заданном n для малых $|\xi_\alpha^i|$, $|\xi_\beta^k|$ имеет место симметрия четырехмерной сферы (или четырехмерного эллипсоида).

Если все скалярные произведения векторов ξ^i , ξ^k , ... определить посредством инвариантов I_a^{ik} , то можно будет сказать, что в пространстве $\mathfrak{H}(\xi)$ введена своеобразная геометрия, такая, что она, будучи при $|\xi_i| \gg a$ псевдоевклидовой, при $|\xi_i| \ll a$ переходит в евклидову.

Результат измерения длины между двумя точками A и B в таком пространстве зависел бы от масштаба, которым эта длина измеряется: больше он элементарной длины a

или меньше ее. Эта парадоксальная ситуация не должна, однако, нас удивлять, так как малые значения координат ξ ненаблюдаемы.

Поскольку в физически наблюдаемых матричных элементах матрицы рассеяния (40.1) мы ограничиваемся соблюдением условий макроскопической причинности, то эта «парадоксальность» оказывается запрятанной очень глубоко.

§ 41. Стохастическая геометрия

В основе стохастической метрической геометрии лежит предположение, что каждой паре элементов P, Q стохастического пространства $\mathfrak{R}(P)$ можно сопоставить функцию распределения $F_{PQ}(z)$, которая интерпретируется как вероятность того, что расстояние $r(P, Q)$ между точками P и Q меньше z . Этой функции приписываются следующие свойства:

$$\left. \begin{aligned} 1) F_{PQ}(z) &= 1 \text{ для всех } z \text{ только тогда, когда} \\ &P = Q; \\ 2) F_{PQ}(z) &= 0 \text{ для всех } z \leq 0; \\ 3) F_{PQ} &= F_{QP} \text{ — симметрия;} \\ 4) \text{ если } F_{PQ}(z) &= 1 \text{ и } F_{QR}(u) = 1, \text{ то} \\ &F_{PR}(z+u) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (41.1)$$

Эти свойства отображают обычные свойства расстояния в метрическом пространстве $\mathfrak{R}_m(P)$:

$$\left. \begin{aligned} 1) r(P, Q) &= 0 \text{ только тогда, когда } P = Q; \\ 2) r(P, Q) &\geq 0; \\ 3) r(P, Q) &= r(Q, P); \\ 4) r(P, Q) + r(Q, R) &\geq r(P, R). \end{aligned} \right\} \quad (41.1')$$

Эта метрика возникает из стохастической метрики как частный случай, если

$$F_{PQ}(z) \equiv H[z - r(P, Q)] \quad (41.2)$$

и

$$H(z) = 1 \quad \text{для } z > 0, \quad (41.2')$$

$$H(z) = 0 \quad \text{для } z \leq 0 \quad (41.2'')$$

(см. [86, 87]).

С физической точки зрения стохастическая метрика ведет к стохастической арифметизации пространства.

Действительно, элементы пространства P арифметизируются таким путем, что каждому элементу P , отмеченному каким-либо определенным физическим содержанием, приписывается число $x(P)$ (координата), которое получается измерением расстояния $r(P, 0)$ от некоторого условного элемента (0) («начала координат»).

Стохастический характер расстояния $r(P, Q)$ приводит к тому, что если измерено

$$r(P, 0) = L, \quad (41.3)$$

то истинное расстояние l между элементами P и 0 равно L с вероятностью

$$dW(L, l) = w(L, l) dl. \quad (41.4)$$

Поэтому арифметизация пространственного многообразия становится стохастической и каждой измеренной координате $x(P)$ элемента P может быть приписана истинная координата $X(P)$ только с некоторой степенью вероятности.

В дальнейшем мы будем понимать под стохастическим пространством именно такое пространство $\mathfrak{H}_{st}(X)$, которое стохастически отображается на пространство измеряемых координат $\mathfrak{H}(x)$, и введем вероятность

$$dW(X, x) = w(X, x) dx. \quad (41.5)$$

Эта формула отличается от формулы (41.4) только тем, что расстояниям L и l приписан знак \pm , так что их теперь следует рассматривать как координаты точки P , измеряемую и истинную. Если наше пространство однородно, то вероятность (41.5) есть функция только разности $X - x$; в этом случае вместо (41.5) мы можем написать

$$dW(X, x) = w\left(\frac{X-x}{a}\right) \frac{dx}{a}, \quad (41.6)$$

где a — некоторый масштаб длины, характеризующий разброс частных значений стохастической координаты x около ее среднего значения $x = X(P)$.

Стохастическому пространству был посвящен ряд работ [88—92]. Мы не намерены входить в подробный крити-

ческий анализ этих работ. Не будет большой ошибкой сказать, что идейное содержание этих работ может быть объединено в предположении, что «истинные» координаты (x, t) физического события P ввиду некоторой принципиальной неточности, свойственной прибору, измеряющему x, t , или самому событию P , определяются лишь с некоторой степенью вероятности. Эти слова следует понимать в том смысле, что если представить себе ансамбль лаборантов, обладающих тождественными и самыми совершенными (идеальными) приборами для измерения координаты события P , то они все же получают различные результаты для $x = x(P)$, распределенные статистически около среднего значения $\bar{x} = X(P)$:

$$\bar{x} = X(P) = \int x w \left(\frac{X-x}{a} \right) \frac{dx}{a}, \quad (41.7)$$

с характерной статистической дисперсией, равной

$$\overline{\Delta x^2} = \overline{(X-x)^2} = \int (X-x)^2 w \left(\frac{X-x}{a} \right) \frac{dx}{a} = a^2, \quad (41.8)$$

при условии нормировки

$$\int w \left(\frac{X-x}{a} \right) \frac{dx}{a} = 1. \quad (41.9)$$

Более детально можно указать по крайней мере три возможности, которые ведут к стохастическому пространству $\mathfrak{H}_{st}(X)$:

а) идеальный прибор, измеряющий расстояния, имеет принципиально неустранимую неточность $\Delta x \approx a$;

б) объекты, «частицы», с помощью которых фиксируются точки пространства, имеют конечные размеры a , что ведет к $\Delta x \approx a$;

в) среда, в которой распространяется сигнал, служащий для измерения расстояний, турбулентна, так что скорость сигнала флуктуирует.

Главное отличие физических теорий стохастического пространства—времени от теорий, разработанных математиками [86, 87], заключается в том, что физическое пространство имеет недефинитную метрику, в то время как метрика, описываемая распределением $F_{PQ}(z)$ (41.1), предполагается положительно-дефинитной. В силу недефинитности метрики физического пространства—времени

формула (41.6) не может быть обобщена на реальное пространство—время просто путем увеличения числа измерений.

Действительно, инвариантность вероятности dW относительно преобразования Лоренца требует, чтобы плотность вероятности w была функцией инварианта. Единственным возможным инвариантом является интервал

$$s^2 = (X - x)^2 = (T - t)^2 - (X - x)^2.$$

Однако вероятность

$$dW = w \left(\frac{s^2}{a^2} \right) \frac{d^4x}{a^4} \quad (41.6')$$

ненормируема и не может представлять распределения стохастической переменной $x(P)$, сосредоточенной около точки P (а не около светового конуса $s^2 = 0$).

Для того чтобы получить сосредоточенное около точки P распределение, следует помимо четырехмерного вектора $(X - x)$ еще иметь в своем распоряжении времениподобный вектор n . Имея такой вектор, можно построить ранее встречавшийся нам инвариант $I(n, X - x)$ (см. (39.15)) и образовать положительно-дефинитное расстояние R :

$$R = + \sqrt{2(n, X - x)^2 - s^2} \geq 0. \quad (41.10)$$

Вероятность dW может теперь рассматриваться как функция этого расстояния:

$$dW(X - x, n) = w \left(\frac{R}{a} \right) \frac{d^4x}{a^4}. \quad (41.11)$$

Эта вероятность может быть сосредоточена около точки $X(P)$ и может давать ограниченное значение для среднего квадратичного отклонения

$$\overline{\Delta x^2} = \int (X - x)^2 w \left(\frac{R}{a} \right) \frac{d^4x}{a^4} \approx a^2. \quad (41.8')$$

Вводя в формулу для вероятности dW вектор n , мы встречаемся с уже рассмотренной нами ранее проблемой выбора этого вектора (ср. § 39).

В соответствии с упомянутыми выше возможностями а) и б) *) рассмотрим сначала первую из них.

*) Возможность в) будет рассмотрена в § 42.

а) Вектор n связан с системой отсчета наблюдателя, так что вектор n совпадает с направлением мировой линии этого наблюдателя (ср. [50, 91]). В этом случае усреднение физических величин, зависящих от стохастической координаты x мировой точки P , будет приводить к результатам, зависящим от наблюдателя.

Действительно, пусть $F(x)$ есть физическая величина, функция стохастической переменной $x = X - \xi$. Ее наблюдаемое среднее значение будет

$$\begin{aligned}\bar{F}(X) &= \overline{F(x)} = \int F(X - \xi) \omega(\xi, n) d^4\xi = \\ &= \int \tilde{F}(Q) e^{iQx} \tilde{\omega}(Q, n) d^4Q, \quad (41.12)\end{aligned}$$

где $\tilde{F}(Q)$ — фурье-образ $F(x)$, а $\tilde{\omega}(Q, n)$ — фурье-образ плотности вероятности $\omega(\xi, n)$. Вектор n для каждого наблюдателя имеет компоненты $n = (1, 0, 0, 0)$. Поэтому величина $\tilde{\omega}(Q, n)$ не будет инвариантом при переходе от одной системы отсчета к другой. В частности, это ясно из следующего физического соображения. Пусть $F(x)$ есть плоская волна. В одной системе отсчета она может иметь частоту ω такую, что $\omega a \ll 1$ (a — мера дисперсии стохастической координаты x), так что среднее $\bar{F}(X)$ практически не будет отличаться от истинного $F(x)$; в системе же отсчета другого наблюдателя из-за эффекта Допплера величина ωa может быть ≥ 1 , и тогда $|\bar{F}(X)| \ll |F(x)|$.

Поэтому в теоретической схеме, рискующей оперировать с вектором n , привязанным к наблюдателю, должно быть проявлено особое внимание к величинам, инвариантность которых не подлежит сомнению. К таким величинам принадлежит, например, полная вероятность рождения определенного числа и определенного сорта частиц. Эта величина могла бы зависеть от системы отсчета только в том случае, если бы существовала выделенная система отсчета (например, система, связанная с физическим вакуумом, если его рассматривать в старом смысле как некоторую среду, как «эфир» *).

б) Обратимся теперь ко второй возможности, когда стохастичность координаты $x(P)$ обусловлена конечными

*) Заметим, кстати, что А. Эйнштейн не боялся употреблять это^Т термин.

размерами частиц. В этом случае физическое событие P отождествляется с наличием в этой точке частицы, имеющей конечные размеры a . Стохастичность координаты $x(P)$ возникает теперь по той причине, что не представляется возможным определить, какая именно точка внутри частицы (в пределах $\Delta x \approx a$) рассеяла сигнал, как бы точно ни был он локализован в пространстве—времени *).

Мы можем представить себе, что пространство—время заполнено такими частицами, которые мы имеем возможность отличать друг от друга, как это предполагается в лагранжевом методе описания течения жидкости. В этом случае времениподобный вектор n в формуле (41.12) может быть отождествлен с четырехмерной скоростью частицы u .

Релятивистская инвариантность вероятности $dW(X-x, n)$ при переходе от системы отсчета одного наблюдателя к системе отсчета другого будет соблюдаться в силу того, что вектор u подчиняется теперь преобразованию Лоренца. Допущение зависимости вероятности от переменных $\xi = X-x$ и u одновременно означает предположение о коммутативности этих переменных:

$$[u, \xi] = 0. \quad (41.13)$$

Поэтому естественно рассматривать переменную ξ как переменную, описывающую внутреннюю структуру частиц.

В частности, в цитированной выше работе [89] предполагается, что масса покоя частицы m может быть представлена оператором \hat{m} , зависящим от внутренней координаты ξ и вектора четырехмерной скорости частицы u . Именно:

$$\hat{m}(\xi, u) = m_0 + \alpha \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\mu} + 2 \left(u_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \right)^2 + \xi_\mu \xi_\mu - (u_\mu \xi_\mu)^2 \right]. \quad (41.14)$$

Переходя в систему покоя частицы ($n = 1, 0, 0, 0$), нетрудно видеть, что метрика в пространстве $\mathfrak{R}(\xi)$ есть метрика положительно-дефинитная, евклидова метрика: $I(\xi, \xi) = \xi_1 \xi_1 + \xi_2 \xi_2 + \xi_3 \xi_3 + \xi_4 \xi_4$ **). Волновая функция

*) Это предположение о точной локализации сигнала эквивалентно в данном случае предположению об «идеальности» прибора, измеряющего координату частицы $x(P)$.

**) Такая метрика, основанная на условии (41.13), была введена в работе [93], посвященной теории релятивистского волчка.

свободной частицы, движущейся с импульсом P , имеет вид

$$\psi_P(x, \xi) = \varphi_P(\xi) e^{i \frac{Px}{\hbar}} \quad (41.15)$$

и подстановка ее в уравнение Дирака (14.1) приводит к уравнению

$$[i\gamma_\mu P_\mu + \hat{m}(\xi, P)] \varphi_P(\xi) = 0, \quad (41.16)$$

где $\hat{m}(\xi, P)$ есть оператор (41.14), в котором скорость u выражена через полный импульс $u = P/\sqrt{P^2}$.

Однако все следствия этой любопытной теоретической схемы не были изучены.

§ 42. Дискретное пространство — время

Этот раздел посвящается анализу идей о дискретном «квантованном» пространстве—времени. Само понятие «квантования» пространства—времени не является достаточно определенным. Здесь мы будем употреблять это понятие в отношении теоретических схем, предполагающих ту или иную дискретность пространства—времени, не вытекающую из какой-либо динамики материи, а имеющую чисто геометрический характер. В наиболее простой форме идея о дискретном квантовании пространства—времени заключается в предположении, что точки пространственно-временного многообразия не образуют континуума, а представляют собою некоторое дискретное, счетное или даже конечное множество. В частности, можно предположить, что оно образовано точками некоторой решетки (см. [94—97]).

Предполагая ту или иную дискретность пространственно-временного многообразия, мы сталкиваемся с двумя проблемами:

а) с проблемой преобразования этого многообразия от одной системы отсчета к другой, движущейся (относительность);

б) с проблемой предельного перехода от дискретности к континууму современной теории (соответствие).

Эти проблемы могут быть иллюстрированы на примере четырехмерного многообразия $\mathfrak{D}_4(X)$, каждая точка которого X определяется координатами $x_1 = n_1 a$, $x_2 = n_2 a$,

$x_3 = n_3 a$, $t = v a$, где n_1 , n_2 , n_3 и v суть целые числа и длина a — постоянная решетки.

Пусть $\psi(x, t)$ есть поле, описывающее некоторую физическую реальность, способную распространяться в пространстве $\mathfrak{D}_4(x)$. Слово «распространяется» мы понимаем теперь в том смысле, что: а) существует связь между значением поля ψ в любой точке $x(x, t)$ и его возможными значениями в соседних точках; б) мы допускаем, что существует деление многообразия $\mathfrak{D}_4(x)$ на пространство $\mathfrak{D}_3(x)$ и время $\mathfrak{D}_1(t)$, (ср. § 3). Предполагая, далее, что поле ψ обладает свойством линейности, и понимая под соседними точками «ближайшие», т. е. точки с координатами

$$x_1 \pm a, x_2, x_3, t; x_1, x_2 \pm a, x_3, t; x_1, x_2, x_3 \pm a, t; \\ x_1, x_2, x_3, t \pm a,$$

мы можем написать для ψ уравнение

$$\alpha \psi(x_1, x_2, x_3, t) + \\ + \beta_1 [\psi(x_1 + a, x_2, x_3, t) + \psi(x_1 - a, x_2, x_3, t)] + \\ + \beta_2 [\psi(x_1, x_2 + a, x_3, t) + \psi(x_1, x_2 - a, x_3, t)] + \\ + \beta_3 [\psi(x_1, x_2, x_3 + a, t) + \psi(x_1, x_2, x_3 - a, t)] + \\ + \gamma [\psi(x_1, x_2, x_3, t + a) + \psi(x_1, x_2, x_3, t - a)] = 0. \quad (42.1)$$

Если многообразие $\mathfrak{D}_4(x)$ однородно, то коэффициенты α , β_1 , β_2 , β_3 , γ не зависят от x и t ; если оно к тому же и изотропно по переменным x_1 , x_2 , x_3 , то $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$. Выделяя время, мы допустим, что знаки коэффициентов β и γ противоположны. Тогда уравнение (42.1) удобно переписать в виде

$$(\alpha + 2\beta + 2\gamma) \psi + \beta [\Delta_1 \psi + \Delta_2 \psi + \Delta_3 \psi] + \gamma \Delta_t \psi = 0, \quad (42.2)$$

где Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_t — вторые конечные разности по переменным x_1 , x_2 , x_3 и t соответственно. По определению

$$\Delta_i \psi \equiv \psi(\dots, x_i + a, \dots) + \psi(\dots, x_i - a, \dots) - \\ - 2\psi(\dots, x_i, \dots), \quad (42.3)$$

где точками обозначены аргументы, не подвергающиеся смещению $\pm a$.

В целях сокращения интересующего нас исследования уравнения (42.3) ограничимся в дальнейшем спе-

циальным случаем $\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0$, $\beta = -\gamma$, так что вместо (42.2) получается более простое уравнение:

$$\Delta_1\psi + \Delta_2\psi + \Delta_3\psi - \Delta_t\psi = 0. \quad (42.4)$$

Это уравнение имеет собственные функции в виде плоских волн

$$\psi = \text{const} \cdot e^{i(\Pi x - \varepsilon t)}, \quad (42.5)$$

где импульс Π (Π_1, Π_2, Π_3) и энергия ε связаны уравнением дисперсии этих волн, получающимся из (42.4) подстановкой туда выражения (42.5):

$$\sin^2\left(\frac{\Pi_1 a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Pi_2 a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Pi_3 a}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varepsilon a}{2}\right) = 0. \quad (42.6)$$

Уравнение (42.4), решение (42.5) и дисперсионное уравнение (42.6) обладают в пространстве $\mathfrak{H}_3(\Pi)$ симметрией пространственной кубической решетки и, следовательно, инвариантны относительно группы симметрии этой решетки. Что касается преобразований в одной из плоскостей (Π_k, ε) , то эти преобразования меняют ролями одну из координат x_k и время t ; одновременно одна из компонент импульса Π_k меняется с энергией ε .

Эти дискретные и конечномерные преобразования на первый взгляд ничего общего не имеют с преобразованием Лоренца. Однако при $|\Pi a| \ll 1$ уравнение дисперсии (42.6) принимает вид

$$\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2 - \varepsilon^2 = O(\Pi a^4), \quad (42.7)$$

где через $O(\Pi a^4)$ обозначен остаток порядка $(\Pi a)^4$. Одновременно конечные разности в (42.4) могут быть заменены на вторые производные, так что вместо (42.4) получаем

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = O(\Pi a^4) \psi. \quad (42.8)$$

Таким образом, для достаточно малых импульсов $|\Pi|$ имеет место лоренцевская инвариантность; при больших импульсах, $|\Pi| \sim \Pi/a$, ситуация решительно меняется и остаются в силе лишь дискретные преобразования, характерные для решетки. Несмотря на наличие такого соответствия с обычной теорией, мы не можем избежать в этой теоретической схеме существования выделенной системы отсчета — системы решетки $\mathfrak{D}_4(x)$; эта система выделяется

тем, что для частиц, имеющих в этой системе малые импульсы, пригодны обычные соотношения специальной теории относительности.

Обратимся теперь к другому подходу — к идее дискретного пространства — времени, основанному на рассмотрении координат x_μ как операторов смещения \hat{x}_μ в искривленном пространстве импульсов $\mathfrak{R}_4(p)$ [98]. Наиболее прямой путь к построению таких операторов исходит из идеи ограничения, накладываемого на квадрат импульса *):

$$p^2 = p_4^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \leq \frac{1}{a^2}, \quad (42.9)$$

где a — некоторая характерная для этой теории длина (постоянная Планка \hbar и скорость света c приняты здесь равными 1). Условие (42.9) физически означает ограничение на квадрат массы частиц: $m^2 = 1/a^2$.

Введем теперь однородные координаты $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ и η_4 такие, что

$$p_\mu = \frac{1}{a} \frac{\eta_\mu}{\eta_0} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4). \quad (42.10)$$

В этих координатах выражение (42.9) для предельных значений p принимает вид

$$\eta_4^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 - \eta_0^2 = 0. \quad (42.11)$$

Наряду с этой квадратичной формой рассмотрим пятимерную гиперболу

$$\eta_4^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 - \eta_0^2 = -a^2 \quad (42.12)$$

и определим теперь операторы \hat{x}_μ как операторы бесконечно малых вращений, оставляющих инвариантной эту гиперболу. Эти операторы таковы:

$$\hat{x}_\alpha = ia \left(\eta_0 \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} - \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (42.13)$$

$$\hat{x}_4 = ia \left(\eta_0 \frac{\partial}{\partial \eta_4} + \eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_0} \right). \quad (42.13')$$

*) Можно также рассмотреть другой тип ограничения, именно $p^2 \gg -1/a^2$ (см. [100]).

Здесь $\hat{x}_4 \equiv \hat{t}$ есть оператор времени. Эти операторы могут быть дополнены операторами момента количества движения:

$$\hat{L}_\alpha = i \left(\eta_\beta \frac{\partial}{\partial \eta_\gamma} - \eta_\gamma \frac{\partial}{\partial \eta_\beta} \right), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \quad (42.14)$$

$$\hat{M}_\alpha = i \left(\eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} + \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial \eta_4} \right), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (42.14')$$

Нетрудно показать, что нетривиальные правила перестановки гласят:

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta] = i a^2 \hat{L}_\gamma, \quad (42.15)$$

$$[\hat{x}_4, \hat{x}_\alpha] = i a^2 \hat{M}_\gamma, \quad (42.15')$$

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i (\delta_{\alpha\beta} + a^2 \hat{p}_\alpha \hat{p}_\beta), \quad (42.16)$$

$$[\hat{x}_4, \hat{p}_\alpha] = i (1 - a^2 \hat{p}_4^2), \quad (42.16')$$

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_4] = i a^2 \hat{p}_\alpha \hat{p}_4. \quad (42.16'')$$

Тем же путем из (42.14) и (42.14') получим

$$\hat{L}_\alpha = \hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma - \hat{x}_\gamma \hat{p}_\beta, \quad (42.17)$$

$$\hat{M}_\alpha = \hat{x}_\alpha \hat{p}_4 + \hat{x}_4 \hat{p}_\alpha, \quad (42.17')$$

т. е. операторы \hat{L}_α и \hat{M}_α суть компоненты обычного оператора четырехмерного момента количества движения. Подобным же образом можно найти и операторы \hat{x}_α , $\hat{x}_4 \equiv \hat{t}$ в импульсном представлении:

$$\hat{x}_\alpha = i \left(\frac{\partial}{\partial p_\alpha} + a^2 p_\alpha p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (42.18)$$

$$\hat{t} \equiv \hat{x}_4 = i \left(\frac{\partial}{\partial p_4} - a^2 p_4 p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \right). \quad (42.18')$$

Эти операторы действуют в пространстве $\mathfrak{H}_4(p)$, в котором наложено ограничение (42.9). Собственные функции этих операторов, удовлетворяющие требованиям конечности и однозначности, находятся из уравнений

$$\hat{x}_\psi(p) = x \psi_x(p), \quad (42.19)$$

$$\hat{t} \psi_t(p) = t \psi_t(p), \quad (42.19')$$

где x и t — собственные значения операторов \hat{x} (индекс α сейчас опущен) и \hat{t} . Нетрудно убедиться, что

$$\psi_x(p) = \exp [im \arctg \alpha(p)], \quad (42.20)$$

где

$$\alpha(p) = ap_1 \sqrt{1 - a^2 p^2}, \quad (42.20')$$

а m есть целое число.

Подобным же образом получим

$$\psi_t(p) \approx \exp [it\beta(p)], \quad (42.21)$$

где

$$\beta(p) = \ln \frac{1 + ap_4}{\sqrt{1 - a^2 p^2}}. \quad (42.21')$$

Таким образом, спектр собственных значений переменной x — дискретный: $x = ma$, $m = 0, \pm 1, \pm 2$, а спектр переменной $t = ta$ — непрерывный. Такое «квантованное» пространство впервые было получено Г. Снайдером [98].

Геометрия пространства $\mathfrak{R}_4(p)$, в котором определены приведенные выше операторы и их собственные функции, может быть полностью получена как геометрия многообразия точек, возникающего при проектировании гиперболы (42.12) из ее центра на плоскость $\eta_0 = +a$ [99, 100]. На рис. 45 это показано для случая трех измерений. Осуществляя такую проекцию, нетрудно убедиться, что мы приходим к формуле (42.10), причем *)

$$\eta_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2 p^2}}. \quad (42.22)$$

Из (42.10) и (42.12) нетрудно получить и выражение для квадрата элемента длины в пространстве $\mathfrak{R}_4(p)$:

$$d\sigma^2 = (1 - a^2 p^2)^{-1} [dp^2 + (1 - a^2 p^2)^{-1} (p dp)^2], \quad (42.23)$$

где

$$dp^2 = dp_4^2 - dp_1^2 - dp_2^2 - dp_3^2, \quad (42.24)$$

$$p dp = p_4 dp_4 - p_1 dp_1 - p_2 dp_2 - p_3 dp_3. \quad (42.24')$$

*) Другие возможные варианты геометрии пространства $\mathfrak{R}_4(p)$ могут быть получены путем перемещения центра проекции по оси η_0 (ср. [100]).

Элемент объема, соответствующий этой метрике, равен

$$d\Omega(p) = \sqrt{-g} dp_4 dp_3 dp_2 dp_1 = (1 - a^2 p^2)^{-5/2} dp_4 dp_3 dp_2 dp_1, \quad (42.25)$$

где $\sqrt{-g} = (1 - a^2 p^2)^{-5/2}$ есть детерминант, составленный из метрического тензора $g_{\mu\nu}$, определяющего квадратичную форму (42.23).

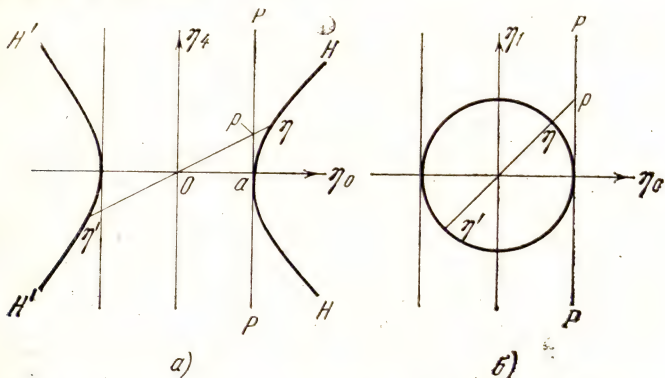


Рис. 45. а) Проектирование гипертсферы $\eta_4^2 - \eta_1^2 - \eta_0^2 = -a^2$ на плоскость $\eta_0 + a$. HN и $H'N'$ — две ветви гипертсферы; pp — плоскость $\eta_0 = +a$; η и η' — две точки гипертсферы, проектирующиеся в точку p плоскости pp (пространство $\mathcal{K}_3(p)$). б) То же в проекции для плоскости (η_1, η_0) .

Введенные ранее операторы для \hat{x}_α , \hat{x}_4 , \hat{L}_α , \hat{M}_α являются эрмитовыми операторами в пространстве $\mathfrak{H}_4(p)$ с элементом объема $d\Omega(p)$.

Теперь можно определить операцию трансляции в пространстве $\mathfrak{H}_4(p)$. Трансляции в пространстве $\mathfrak{H}_4(p)$ являются отображениями вращений гипертсферы (42.12). Поэтому эти трансляции некоммутативны: сдвиг вектора p на вектор k (обозначение: $p(+k)$) не тождествен сдвигу вектора k на вектор p (обозначение: $k(+p)$ *). Преобразование волновой функции $\varphi(p)$ в пространстве $\mathfrak{H}_4(p)$ при бесконечно малом смещении пространства на вектор k может быть записано в виде

$$\varphi(p(+k)) = 1 - i\hat{x}_\mu k_\mu \varphi(p). \quad (42.26)$$

Вычисление показывает, что операторы \hat{x}_μ в (42.26) совпадают с операторами (42.18) и (42.18'), как этого и

*) См. подробности в [100].

следовало ожидать из того факта, что сдвиги в пространстве $\mathcal{R}_4(p)$ суть вращения в пространстве $\mathcal{R}_5(\eta)$.

Отсутствие ассоциативности в сложении импульсов приводит к тому, что обычные законы сохранения энергии—импульса в схеме Снайдера становятся приближенными.

При практическом применении этой изящной геометрической теории к квантовой теории поля встретились серьезные затруднения [101, 102]. Эти затруднения связаны с так называемыми угловыми расходимостями, которые возникают при вычислении диаграмм Фейнмана в пространстве импульсов. Эти угловые расходимости в обычной теории не являются существенными, так как могут быть уничтожены поворотом на $\pi/2$ пути интегрирования в плоскости p_4 , $p \equiv |p|$ (*). При таком повороте недефинитная метрика в плоскости (p_0, p) превращается в дефинитную евклидову метрику. В случае «снайдеровской» геометрии в пространстве импульсов единственная модификация, возникающая при вычислении диаграмм Фейнмана, происходит за счет появления множителя $\sqrt{-g}$ в элементе объема (42.25). Но, как видно из (42.25), этот множитель имеет разрез в комплексной плоскости (p_0, p) при $p^2 = -p_0^2 - p^2 = 1/a^2$. Этот разрез не позволяет выполнить указанный поворот на $\pi/2$. В этой связи в работах [101, 102] была предпринята несколько искусственная попытка *сперва* сделать поворот, а потом ввести снайдеровскую метрику и путем аналитического продолжения вернуться в физическую область недефинитной метрики. Такой прием в некоторых рассмотренных частных случаях оказался осуществимым **).

§ 43. «Квазичастицы» и квантование пространства

В работе [104] было сформулировано оригинальное уравнение, эквивалентное уравнению Томонага—Швингера, однако особенно удобное для применения в искривленном импульсном пространстве.

*) Заметим, что аналитические свойства матричных элементов обычной, локальной теории допускают такой поворот.

**) Следует также отметить работу [103], в которой применяется геометрия импульсного пространства с непостоянной кривизной; в этом варианте геометрии, может быть, будет преодолена обсуждаемая трудность.

Пусть $\sigma = nx$ есть пространственноподобная плоскость, причем n — единичный времениподобный вектор ($n^2 = 1$), направленный в будущее ($n_0 > 0$). Согласно (28.14) имеем

$$i \frac{d\hat{U}(\sigma, -\infty)}{d\sigma} = \hat{W}(\sigma) \hat{U}(\sigma, -\infty), \quad (43.1)$$

где $\hat{W}(\sigma)$ есть энергия взаимодействия (в «представлении взаимодействия» *).

Согласно (28.18) \hat{S} -матрица равна

$$\hat{S} = 1 + i\hat{T} = \hat{U}(+\infty, -\infty). \quad (43.2)$$

Представим оператор $\hat{U}(\sigma, -\infty)$ в виде интеграла:

$$\hat{U}(\sigma, -\infty) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau - i\varepsilon} \hat{R}(n\tau) e^{i\sigma\tau}, \quad (43.3)$$

где $\hat{R}(n\tau)$ — некоторый новый оператор, а τ — инвариантный параметр, сопряженный σ ; $\varepsilon \rightarrow +0$. Из (43.2) и (43.3) при $\sigma \rightarrow +\infty$ следует

$$\hat{S} = 1 + i\hat{R}(0), \quad (43.4)$$

$$\hat{R}(0) = \hat{T}. \quad (43.5)$$

Положим теперь

$$\hat{W}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\hat{W}}(n\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \quad (43.6)$$

и подставим (43.3) и (43.6) в уравнение (43.1). Нетрудно видеть, что это уравнение будет удовлетворено, если подчинить оператор $\hat{R}(n\tau)$ условию **)

$$\hat{R}(n\tau) = \hat{\hat{W}}(n\tau) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\hat{W}}(n\tau - n\tau') \frac{d\tau'}{\tau' - i\varepsilon} \hat{R}(n\tau'). \quad (43.7)$$

*) В (43.1) положено $\hbar = 1$.

**) В дополнении XV приведен прямой и более подробный вывод уравнения (43.7).

Рассмотрим специальный случай самовоздействующего скалярного поля $\varphi(x)$ с кубическим взаимодействием *):

$$\hat{W}(x) = g : \hat{\varphi}(x)^3 :. \quad (43.8)$$

Полагая

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ikx} \tilde{\varphi}(k) d^4k, \quad (43.9)$$

получим на основании (43.6), (43.8) и (43.9)

$$\begin{aligned} \hat{\hat{W}}(n\tau) &= \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \times \\ &\times \int \delta^4(n\tau - k_1 - k_2 - k_3) : \tilde{\varphi}(k_1) \tilde{\varphi}(k_2) \tilde{\varphi}(k_3) : d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3, \end{aligned} \quad (43.10)$$

где векторы k_1, k_2, k_3 имеют смысл импульсов частиц.

Итерируя теперь уравнение (43.7), найдем оператор \hat{R} в виде ряда по степеням константы взаимодействия g :

$$\hat{R}(n\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} \hat{R}_s(n\tau), \quad (43.11)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{R}_s(n\tau) &= \frac{1}{(2\pi)^{s-1}} \int \hat{W}(n\tau_1) \frac{d\tau_1}{\tau - \tau_1 + i\varepsilon} \hat{W}(n\tau_2 - n\tau_1) \times \dots \\ &\dots \times \frac{d\tau_{s-1}}{\tau - \tau_{s-1} - i\varepsilon} \hat{W}(n\tau_{s-2} - n\tau_{s-1}). \end{aligned} \quad (43.12)$$

Если привести это выражение к нормальному виду, то получается

$$\begin{aligned} \hat{R}_s(n\tau) &= \sum_{m=1}^{3s} \int \delta^4(n\tau - k_1 - k_2 - \dots - k_m) \times \\ &\times S_m^{(s)}(\tau, k_1, k_2, \dots, k_m) : \tilde{\varphi}(k_1) \tilde{\varphi}(k_2) \dots \tilde{\varphi}(k_m) : d^4k_1 d^4k_2 \dots d^4k_m. \end{aligned} \quad (43.13)$$

Здесь функции $S_m^{(s)}$ являются интегралами от произведений функций $\Delta_+(k) = \theta(k_0) \delta(k^2 - m^2)$ и функций $g(\tau_r) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\tau - \tau_r - i\varepsilon}$. Из-за наличия множителей $\Delta_+(k)$ в этой

*) Этот специальный случай легко обобщается и приводится здесь лишь ради простоты.

теории все частицы в промежуточных состояниях являются реальными частицами, для которых $k^2 = m^2$ и $k_4 > 0$. Виртуальность частиц в промежуточных состояниях, характерная для обычной теории возмущений, в этом новом подходе выражается в появлении дополнительных интегрирований по переменным $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{s-1}$, содержащимся в функциях $g(\tau_r) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\tau - \tau_r - i\varepsilon}$. Эти дополнительные интегрирования должны быть учтены при построении диаграмм, изображающих функции $R_s(n\tau)$.

Необходимое обобщение метода диаграмм Фейнмана может быть сделано следующим образом.

Будем сопоставлять сплошным внешним линиям, как обычно, операторы поля $\tilde{\varphi}(k)$ и при $\tau \neq 0$ дополним их внешними пунктирными линиями так, чтобы соблюдался закон сохранения

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m - n\tau = 0. \quad (43.14)$$

Сплошные внутренние линии сопоставим функциям $\Delta_+(k)$, а функции распространения $g(\tau_r)$ будем изображать пунктирными линиями. Эти линии будут соединять все вершины. На рис. 46 изображены некоторые простейшие диаграммы.

Следует напомнить, что для перехода к физической \hat{S} -матрице необходимо положить $\tau = 0$. Поэтому простейшая диаграмма а) не описывает реального физического процесса, так как она описывала бы распад одной из частиц на две или обратный процесс синтеза, что противоречило бы закону сохранения энергии — импульса. Две диаграммы на рис. 46, б суть диаграммы собственной энергии. В них предполагается интегрирование по переменным q и τ . Более сложная диаграмма на рис. 46, в описывает рассеяние частиц.

В целом весь механизм взаимодействия реальных частиц может быть описан как обмен реальными частицами с участием «квазичастиц», имеющих импульсы $n\tau_1, n\tau_2, \dots, n\tau_{s-1}$ (пунктирные линии), причем переменные $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{s-1}$ пробегают значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Оказывается, что все расходимости в этой схеме расчета возникают только за счет интегрирования по этим переменным, т. е. по импульсам квазичастиц в промежуточных состояниях. Поэтому можно избежать расходи-

мостей, если ограничить область интегрирования по переменным τ . Это можно сделать, если перейти к искривленному τ -пространству и допустить, что точки компонент импульса размещены не на прямой от $-\infty$ до $+\infty$, а на окружности радиуса \hbar/a , где a — некоторая «элементарная» длина, причем диаметрально противоположные точки

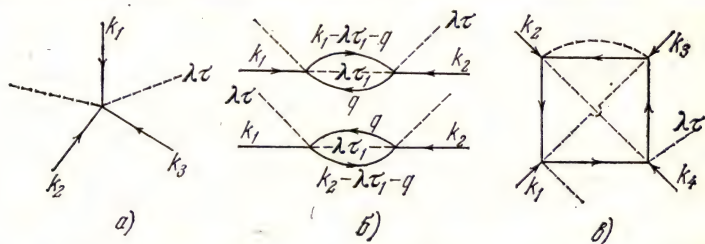


Рис. 46. Простейшие диаграммы в теории квантованного пространства: а) вершина для трех реальных частиц k_1, k_2, k_3 и «квазичастицы» $\lambda\tau$; б) диаграммы собственной энергии частицы $\lambda\tau$ с учетом возможного испускания или поглощения «квазичастицы» $\lambda\tau$; в) диаграмма для рассеяния реальных частиц k_1, k_2, k_3, k_4 ; $\lambda\tau$ — «квазичастица».

круга отождествляются. В этом случае интегрирование ограничивается пределами

$$-\frac{\pi\hbar}{2a} \leq n\tau \leq \frac{\pi\hbar}{2a}. \quad (43.15)$$

При $a \rightarrow 0$ такая окружность переходит в прямую и пределы интегрирования по τ раздвигаются от $-\infty$ до $+\infty$.

Группа трансляций на прямой и группа трансляций на окружности с отождествленными противоположными точками изоморфны. Различие преобразований в существенном сводится к изменению операции сложения импульсов τ_1 и τ_2 , которая на указанной окружности будет гласить:

$$\tau_1 (+) \tau_2 = \tau_1 + \tau_2 \text{ по модулю } \frac{2\pi\hbar}{a}. \quad (43.16)$$

Иными словами, складывая импульсы, мы должны оставаться в пределах $-\pi\hbar/a, +\pi\hbar/a$. Уравнение (43.7) теперь переписется в виде

$$\hat{R}(n\tau) = \hat{W}(n\tau) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \hat{W}(n|\tau(-)\tau') \frac{d\tau'}{\tau' - i\varepsilon} \hat{R}(n\tau'). \quad (43.7')$$

Отсюда можно получить условие унитарности

$$\hat{R}(0) - \hat{R}^+(0) = i\hat{R}(0)\hat{R}^+(0) \quad (43.17)$$

и связь между матрицами \hat{T} и \hat{R} :

$$\hat{T} = \hat{R}(0), \quad (43.5')$$

а также другие соотношения, характерные для теории при $a=0$.

Однако преобразование к координатному пространству очевидным образом меняется. Действительно, все функции переменной τ в этой новой схеме должны быть периодическими функциями этой переменной с периодом $2\pi\hbar/a$. Поэтому фурье-преобразование по переменной τ , т. е. вдоль вектора n , должно иметь вид

$$f(\sigma) = \int_{-\frac{\pi\hbar}{a}}^{+\frac{\pi\hbar}{a}} e^{i\sigma\tau} \tilde{f}(\tau) d\tau. \quad (43.18)$$

Это преобразование имеет смысл только в том случае, если сопряженная к τ пространственная переменная $\sigma = n\hbar$ дискретна и принимает значения, кратные элементарной длине:

$$0, \pm a, \pm 2a, \dots, \pm ma. \quad (43.19)$$

Таким образом, допущение новой группы трансляций ведет к квантованию пространства — времени вдоль направления вектора n . В силу нового закона сложения (43.16) внешние пунктирные линии могут соответствовать реальным квазичастицам с импульсом $2\pi\hbar/a$. Поэтому диаграмма рис. 46, а при $n\tau = 2\pi\hbar/a$ будет уже описывать реальный процесс с участием квазичастицы высокого импульса.

Эти процессы аналогичны известным процессам «переноса» в теории кристаллических решеток, где сохранение импульса для частиц, движущихся в решетке, имеет место только по модулю $2\pi\hbar/a$ (a — постоянная решетки); импульс $2\pi\hbar/a$ передается в этом случае бесконечно тяжелой решетке.

Обычный закон сохранения энергии — импульса в рассматриваемой схеме не имеет места, что есть прямое следствие неоднородности времени в направлении вектора n ,

которое приобретает структуру дискретной решетки. Физически это нарушение можно интерпретировать как поглощение или излучение «квазичастиц», имеющих импульс $2\pi\hbar/a$.

Описанная схема квантованного пространства—времени обладает простотой и изяществом.

Деликатным пунктом, требующим особого внимания, является зависимость физических величин (импульса реальных квазичастиц и элементов матрицы рассеяния) от единичного вектора n . Этот вектор указывает то направление, в котором пространство—время имеет слоистую структуру, т. е. направление, которое является *выделенным направлением*, нарушающим характерную для геометрии Эйнштейна—Минковского изотропность пространственно-временного континуума. Возникающая здесь ситуация сходна с той, которая имеет место в случае временного единичного вектора n , с помощью которого может быть обеспечена локальность акаузальности (см. §§ 36, 37).

Видимо, возможны следующие три интерпретации: а) вектор n является «внешним» (см. § 38), например, он может быть связан с движением гипотетического «эфира» или галактик [2]; б) вектор n есть собственный вектор наблюдателя, так что он в каждой системе отсчета имеет значение $n = (1, 0, 0, 0)$. В этом случае возникает ситуация, обсужденная в § 39; в) вектор n является произвольным единичным времениподобным вектором. В этом случае квадраты матричных элементов $T_{fi}(n)$, величины $|T_{fi}(n)|^2$, были бы пропорциональны вероятности того, что в процессе перехода $f \rightarrow i$ приняли участие «квазичастицы», реальные и виртуальные, имеющие импульсы, параллельные вектору n .

§ 44. Флуктуации метрики

В тех областях пространства, где имеется турбулентное движение материи, сопровождающееся значительными случайными изменениями плотности материи или значительными случайными иррегулярностями скорости движения материи, метрический тензор $g_{\mu\nu}$ (8.1) становится случайной величиной. Тем самым становятся случайными величинами промежутки времени t_{PQ} и расстояние x_{PQ} , раз-

деляющие два события P и Q . В этом случае можно говорить лишь о вероятности того, что $t_{PQ} = t$ и $x_{PQ} = l^*$).

Предположим, что тензор энергии — импульса материи может быть представлен в виде суммы:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^0 + \delta T_{\mu\nu}, \quad (44.1)$$

где $T_{\mu\nu}^0$ описывает глобальное движение материи, характеризованное большими периодами времени T и большими масштабами L , в то время как дополнительный член $\delta T_{\mu\nu}$ является следствием турбулентного движения материи и характеризуется малыми периодами времени $\tau \ll T$ и малыми масштабами $\lambda \ll L$. Среднее значение $\delta T_{\mu\nu}$ за промежутки времени $\sim T$ и в масштабах $\sim L$ принимается равным нулю:

$$\overline{\delta T_{\mu\nu}} = 0, \quad (44.2)$$

где черта сверху означает усреднение по турбулентному движению. Разложим соответствующим образом и метрический тензор $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}, \quad (44.3)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (44.3')$$

Ограничиваясь линейным приближением по величинам $\delta T_{\mu\nu}$ и $h_{\mu\nu}$, из уравнения Эйнштейна для метрического тензора $g_{\mu\nu}$ (8.3) можно получить уравнение, справедливое для малых $\delta T_{\mu\nu}$ и $h_{\mu\nu}$ (см., например, [13] или [14]). Это уравнение имеет вид

$$-\frac{1}{2} \square^2 h_{\mu\nu} = \kappa t_{\mu\nu}, \quad (44.4)$$

где

$$\square^2 = g_0^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad (44.5)$$

$$t_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^0 \delta T, \quad (44.6)$$

$$\delta T = g_0^{\alpha\beta} \delta T_{\alpha\beta}, \quad (44.7)$$

*) Этот параграф может рассматриваться как обсуждение третьей возможной причины стохастичности пространства и времени, отмеченной в пункте а) § 41. В этом параграфе мы следуем работе [106].

$\kappa = 8\pi\gamma/c^2$, $\gamma = 6,7 \cdot 10^{-8}$ см³/г·с² есть постоянная гравитации Ньютона. Из уравнения (44.4) находим

$$h_{\mu\nu}(x) = -2\kappa \square_x^{-2} t_{\mu\nu}(x), \quad (44.8)$$

где \square_x^{-2} есть оператор, обратный оператору \square_x^2 (индекс x указывает, что оператор действует на переменную x).

Пользуясь этим выражением для $h_{\mu\nu}(x)$, выпишем статистическую корреляцию величин $h_{\mu\nu}(x)$, взятых в двух точках пространства—времени x и x' :

$$\overline{h_{\mu\nu}(x) h_{\alpha\beta}(x')} = 4\kappa^2 \square_x^{-2} \square_{x'}^{-2} C_{\mu\nu\alpha\beta}(x, x'), \quad (44.9)$$

где величина

$$C_{\mu\nu\alpha\beta}(x, x') = \overline{t_{\mu\nu}(x) t_{\alpha\beta}(x')} \quad (44.10)$$

есть статистическая корреляция компонент тензора $t_{\mu\nu}$, взятых в двух точках пространства—времени x и x' .

Как было объяснено в § 8, пространственно-временной промежуток между событиями P и Q равен

$$s_{PQ} = \int_0^P \sqrt{\pm g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu}. \quad (44.11)$$

Для малых $h_{\mu\nu}$ получим

$$s_{PQ} = s_{PQ}^0 + \frac{1}{2} \int_Q^P \frac{h_{\mu\nu}(x) dx_\mu dx_\nu}{\sqrt{\pm g_{\mu\nu}^0 dx_\mu dx_\nu}}, \quad (44.12)$$

где s_{PQ}^0 есть значение интервала s_{PQ} при $h_{\mu\nu} = 0$. В силу (44.2) и (44.8) имеем

$$\Delta s_{PQ} = \overline{s_{PQ} - s_{PQ}^0} = 0. \quad (44.13)$$

Далее, для среднего квадратичного отклонения $\overline{\Delta s_{PQ}^2} = \overline{(s_{PQ} - s_{PQ}^0)^2}$ получим из (44.12)

$$\overline{\Delta s_{PQ}^2} = \frac{1}{4} \int_Q^P \int_Q^P \frac{dx_\mu dx_\nu}{\sqrt{\pm g_{\mu\nu}^0 dx_\mu dx_\nu}} \frac{dx'_\alpha dx'_\beta}{\sqrt{\pm g_{\alpha\beta}^0 dx'_\alpha dx'_\beta}} h_{\mu\nu}(x) h_{\alpha\beta}(x') \quad (44.14)$$

или, подставляя сюда выражения для корреляции из (44.9), найдем

$$\overline{\Delta s_{PQ}^2} = \kappa^2 \int_Q^P \int_Q^P \frac{dx_\mu dx_\nu}{V \pm g_{\mu\nu}^0 dx_\mu dx_\nu} \times \\ \times \frac{dx'_\alpha dx'_\beta}{V \pm g_{\alpha\beta}^0 dx_\alpha dx_\beta} \square_x^{-2} \square_{x'}^{-2} C_{\mu\nu\alpha\beta}(x, x'). \quad (44.15)$$

В частном случае, если направление PQ совпадает с направлением одной из координат, выражение (44.15) существенно упрощается:

$$\overline{\Delta s_{PQ}^2} = \kappa^2 \int_{x_\mu(Q)}^{x_\mu(P)} \frac{dx_\mu}{V \pm g_{\mu\mu}(x)} \times \\ \times \int_{x'_\mu(Q)}^{x'_\mu(P)} \frac{dx'_\mu}{V \pm g_{\mu\mu}^0(x')} \square_x^{-2} \square_{x'}^{-2} C_{\mu\mu\mu\mu}(x, x'). \quad (44.16)$$

Как видно из этой формулы, проблема сводится к вычислению корреляции $C_{\mu\mu\mu\mu}(x, x')$ и величины

$$M_{\mu\mu\mu\mu}(x, x') = \kappa^2 \square_x^{-2} \square_{x'}^{-2} C_{\mu\mu\mu\mu}(x, x'). \quad (44.17)$$

Обратимся теперь к микромиру. В микромире статистический характер метрики может быть следствием флуктуаций поля физического вакуума. Существование такого рода флуктуаций, так же как и флуктуаций электрического заряда вакуума, можно считать доказанным на основании открытия и измерения сдвига уровня электрона в атоме водорода *).

Избегая излишних для сути дела усложнений, мы рассмотрим флуктуации скалярного поля $\varphi(x)$ с массой покоя частиц m . Функция Лагранжа в этом случае имеет вид

$$\hat{L} = \frac{1}{2} \left(g^{\alpha\beta} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_\beta} - m^2 \hat{\varphi}^2 \right), \quad (44.18)$$

*) Впервые на возможность такого сдвига было указано автором этой монографии (см. [143] и [144]).

и соответствующий тензор энергии — импульса выражается формулой

$$\hat{T}_{\mu\nu} = : \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_\nu} - g_{\mu\nu} \hat{L} :, \quad (44.19)$$

где $\hat{\varphi}(x)$ — оператор скалярного поля и предполагается, что произведения вида $\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_\beta}$ написаны в форме нормального произведения (ср. дополнение VII).

Стало быть, среднее по вакууму от $\hat{T}_{\mu\nu}(x)$ равно нулю:

$$\langle 0 | \hat{T}_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle = 0, \quad (44.20)$$

так что в этом случае $\delta T_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}$.

Пользуясь (44.6), нетрудно найти, что

$$\hat{t}_{\mu\nu}(x) = : \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} m^2 \hat{\varphi}^2(x) :. \quad (44.21)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_{\mu\mu\mu\mu}(x, x') = & \kappa^2 \square_x^{-2} \square_{x'}^{-2} \left\langle : \left[\frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\mu} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} g_{\mu\mu} m^2 \hat{\varphi}^2(x) \right] : : \left[\frac{\partial \hat{\varphi}(x')}{\partial x'_\mu} \frac{\partial \hat{\varphi}(x')}{\partial x'_\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\mu} m^2 \hat{\varphi}^2(x') \right] : \right\rangle. \end{aligned} \quad (44.22)$$

Для вычисления этой величины следует иметь в виду, что среднее по вакууму от произведения нормальных произведений определяется формулой

$$\begin{aligned} \langle 0 | : \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) : : \hat{\varphi}(z) \hat{\varphi}(u) : | 0 \rangle = \\ = -\Delta_-(x-z) \Delta_-(y-u) - \Delta_-(x-u) \Delta_-(y-z), \end{aligned} \quad (44.23)$$

где $\Delta_-(x)$ — сингулярная функция, определенная в дополнении XIII*). Из (44.23) следует

$$\begin{aligned} \left\langle : \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \hat{\varphi}(x)}{\partial x_\beta} : : \frac{\partial \hat{\varphi}(y)}{\partial y_\rho} \frac{\partial \hat{\varphi}(y)}{\partial y_\sigma} : \right\rangle = & - \frac{\partial^2 \Delta_-(x-y)}{\partial x_\alpha \partial y_\beta} \frac{\partial^2 \Delta_-(x-y)}{\partial x_\beta \partial y_\sigma} - \\ & - \frac{\partial^2 \Delta_-(x-y)}{\partial x_\alpha \partial y_\sigma} \frac{\partial^2 \Delta_-(x-y)}{\partial x_\beta \partial y_\rho}. \end{aligned} \quad (44.24)$$

*) Для получения этой формулы необходимо переместить в произведении полей $\varphi(x) \varphi(y) \varphi(z) \varphi(u)$ все операторы рождения частиц налево от операторов уничтожения.

Введя вместо функции $\Delta_-(x)$ ее фурье-образ $\bar{\Delta}_-(p)$:

$$\Delta_-(x) = \int \bar{\Delta}_-(p) e^{ipx} d^4p = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_C \frac{e^{ipx} d^4p}{p^2 - m^2} \quad (44.25)$$

(контур C показан ниже на рис. 49, и пользуясь (44.23) и (44.24), получим из (44.22)

$$M_{\mu\mu\mu\mu}(\xi) = \alpha \frac{\kappa^2 \hbar^2}{c^2} \int \frac{\bar{\Delta}_-(p) \bar{\Delta}_-(q) e^{i(p+q, \xi)}}{(p+q)^4} \times \\ \times \left\{ p_\mu^2 q_\mu^2 + \frac{1}{2} g_{\mu\mu} m^2 (p_\mu^2 + q_\mu^2) + \frac{1}{4} g_{\mu\mu}^2 m^4 \right\} d^4p d^4q, \quad (44.26)$$

где $\xi = x' - x$, а α — численный коэффициент порядка ~ 1 . Нетрудно видеть, что этот интеграл расходится на верхнем пределе $|p_\mu| |q_\mu| \approx K \rightarrow \infty$, а именно при $\xi = 0$ получается

$$M_{\mu\mu\mu\mu}(0) = \beta \frac{\kappa^2 \hbar^2}{c^2} K^4, \quad (44.27)$$

а при $\xi = t$ для $Kt \gg 1$

$$M_{\mu\mu\mu\mu}(t) = \gamma \frac{\kappa^2 \hbar^2}{c^2} \frac{K^2}{t^2} \cos Kt. \quad (44.27')$$

Здесь β и γ — численные коэффициенты. Из-за этой расходимости нет смысла более детально вычислять величину $M_{\mu\mu\mu\mu}(x)$. Однако формулы (44.27) и (44.27') полезны в том отношении, что из них видно, что флуктуации метрического тензора, обусловленные флуктуацией поля вакуума, существенны лишь в области масштабов

$$\frac{1}{K} \approx \Lambda_g, \quad (44.28)$$

где Λ_g есть длина, равная

$$\Lambda_g = \sqrt{\frac{\hbar \kappa}{c}} = \sqrt{\Lambda_c r_g} = 0,82 \cdot 10^{-32} \text{ см}, \quad (44.28')$$

где $\Lambda_c = \hbar/mc$ есть комптоновская длина частиц, а $r_g = \kappa m$ — гравитационный радиус частицы. Существенно, что флуктуации не зависят от массы частиц вакуумного поля, поскольку эта масса $m \ll \hbar/\Lambda_c c \approx 10^{-5} \text{ г}^*$.

*) См. работу [107], где обсуждаются частицы «максимоны» с предельной массой $m_g = \hbar/\Lambda_c c$.

Флуктуации поля в масштабах длины $\Lambda_c = \hbar/mc$ дают ничтожный вклад в флуктуации метрического тензора.

Как видно из (44.28'), критический масштаб Λ_g есть среднее геометрическое из гравитационного радиуса частицы r_g и ее комптоновской длины \hbar/mc . Длина Λ_g значительно превосходит гравитационный радиус частицы, но все же еще много меньше длины, характерной для слабых взаимодействий $\Lambda_F \sim 10^{-16}$ см.

Итак, если слабым взаимодействиям суждена определяющая роль в структуре элементарных частиц, то гравитационные явления либо вообще несущественны в мире элементарных частиц, либо сосредоточиваются в таких глубинах, доступ к которым возможен лишь в мечтах.

§ 45. Нелинейные поля и квантование пространства — времени

В этом разделе мы рассматриваем задачу о квантовании нелинейного поля $\varphi(x, t)$, описываемого уравнением Борна—Инфельда в двумерном пространстве—времени $\mathcal{H}_2(x)$. Это уравнение выводится из вариационного принципа:

$$\delta S = 0, \quad S = - \int L \, dx \, dt, \quad (45.1)$$

причем функция Лагранжа определена формулой

$$L = -(1 + \varphi_x^2 - \varphi_t^2)^{1/2}, \quad (45.1')$$

где $\varphi_x \equiv \partial\varphi/\partial x$, $\varphi_t \equiv \partial\varphi/\partial t$. Эта функция является частным случаем функции Лагранжа, рассмотренной ранее в § 7. Масштаб градиента поля φ_0 , являющийся мерой нелинейности, принят в (45.1') за единицу.

Из этого вариационного принципа получается уравнение

$$(1 - \varphi_t^2) \varphi_{xx} + 2\varphi_x \varphi_t \varphi_{xt} - (1 - \varphi_x^2) \varphi_{tt} = 0, \quad (45.2)$$

где

$$\varphi_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \varphi_{xt} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}, \quad \varphi_{tt} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

При $\varphi_0 \rightarrow \infty$, что соответствует $\varphi_x, \varphi_t \rightarrow 0$, из (45.2) получается линейное волновое уравнение

$$\varphi_{xx} - \varphi_{tt} = 0, \quad (45.2')$$

Если положить $z = \varphi(x, t)$, то это уравнение можно рассматривать как уравнение для экстремальной поверхности в пространстве с метрикой $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dz^2$. Действительно, интеграл S в вариационном принципе равен площади такой поверхности. Заметим, что уравнение, вытекающее из лагранжиана

$$L = -(1 + \varphi_x^2 + \varphi_z^2)^{1/2}, \quad (45.3)$$

приводило бы к уравнению минимальной поверхности в обычном евклидовом пространстве с метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Такой поверхностью является, например, поверхность мыльной «пленки», натянутой на заданный контур.

На первый взгляд задача о квантовании нелинейного поля не имеет ничего общего с квантованием пространства—времени. Однако, как было показано в работах [108, 109], существует весьма прямая связь между этими проблемами *).

Для того чтобы показать эту связь, обратимся к задаче Коши для уравнения (45.2). Возьмем начальные условия при $t=0$ в форме

$$\varphi(x, 0) = a(x), \quad \varphi_t(x, 0) = b(x) \quad (45.4)$$

и предположим, что эти функции удовлетворяют условию гиперболичности

$$1 + a'^2(x) - b^2(x) > 0. \quad (45.5)$$

Для решения задачи Коши введем новые переменные α, β , которые будут аналогами переменных $\alpha = x - t, \beta = x + t$, являющихся характеристиками линейного уравнения (45.2'), и будем рассматривать переменные x, t и $z \equiv \varphi$ как функции новых переменных α и β :

$$\begin{aligned} x &= x(\alpha, \beta), \quad t = t(\alpha, \beta), \\ \varphi &= \varphi(t(\alpha, \beta)), \quad x(\alpha, \beta) \equiv z(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (45.6)$$

Вводя вектор $r = r(\alpha, \beta)$ с компонентами t, x и z и определяя скалярное произведение векторов r_1 и r_2 формулой

$$(r_1 r_2) = t_1 t_2 - x_1 x_2 - z_1 z_2, \quad (45.7)$$

*) В дальнейшем мы следуем этим работам.

мы можем переписать уравнение (45.2) в виде

$$r_\alpha^2 D_{\beta\beta} - 2(r_\alpha r_\beta) D_{\alpha\beta} + r_\beta^2 D_{\alpha\alpha} = 0, \quad (45.8)$$

где

$$r_\alpha = \frac{\partial r}{\partial \alpha}, \quad r_\beta = \frac{\partial r}{\partial \beta}, \quad r_{\alpha\alpha} = \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha^2}, \quad r_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 r}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (45.8')$$

и $D_{\rho\sigma}$ есть детерминант

$$D_{\rho\sigma} = \begin{vmatrix} t_{\rho\sigma} & x_{\rho\sigma} & z_{\rho\sigma} \\ t_\alpha & x_\alpha & z_\alpha \\ t_\beta & x_\beta & z_\beta \end{vmatrix} \quad (45.8'')$$

(здесь значки ρ и σ пробегает два значения: α и β). Гиперболичность уравнения приводит к условию

$$(r_\alpha r_\beta)^2 - r_\alpha^2 r_\beta^2 > 0, \quad (45.9)$$

и характеристики уравнения (45.8) определяются формулами

$$r_\alpha^2 = 0, \quad r_\beta^2 = 0. \quad (45.10)$$

Равенства (45.10) вместе с (45.8) образуют систему уравнений для трех искоемых функций: $t(\alpha, \beta)$, $x(\alpha, \beta)$ и $z(\alpha, \beta)$.

Из (45.10) и (45.8) следует, что

$$D_{\alpha\beta} = 0, \quad (45.11)$$

и, следовательно,

$$r_{\alpha\beta} = A r_\alpha + B r_\beta, \quad (45.12)$$

где A и B — произвольные функции переменных α и β . Из (45.10) и (45.12) имеем

$$(r_{\alpha\beta} r_\alpha) = (r_\alpha r_\beta) B = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \beta} r_\alpha^2 = 0, \quad (45.13)$$

$$(r_{\alpha\beta} r_\beta) = (r_\alpha r_\beta) A = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} r_\beta^2 = 0 \quad (45.13')$$

и, так как $(r_\alpha r_\beta) \neq 0$, $A = B = 0$.

Таким образом, мы приходим к окончательной системе уравнений:

$$r_\alpha^2 = 0, \quad r_\beta^2 = 0, \quad r_{\alpha\beta} = 0. \quad (45.14)$$

Из последнего уравнения в (45.14) сразу же следует, что

$$\mathbf{r}(\alpha, \beta) = \mathbf{r}_1(\alpha) + \mathbf{r}_2(\beta), \quad (45.15)$$

где \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — два произвольных вектора. Тогда первые два уравнения (45.14) теперь запишутся в виде

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}_1(\alpha)}{\partial \alpha}\right)^2 = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{r}_2(\beta)}{\partial \beta}\right)^2 = 0. \quad (45.16)$$

Пользуясь произволом в выборе переменных α и β , выберем их таким образом, что при $t=0$, $\alpha=\beta=x$. Тогда начальные условия (45.4) запишутся в виде

$$t(\alpha, \alpha) = t_1(\alpha) + t_2(\alpha) = 0, \quad (45.17)$$

$$x(\alpha, \alpha) = x_1(\alpha) + x_2(\alpha) = \alpha, \quad (45.17')$$

$$z(\alpha, \alpha) = z_1(\alpha) + z_2(\alpha) = a(\alpha). \quad (45.17'')$$

Выразим теперь производную $\frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial t}$ через производные от t , x и z по α и β :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\begin{vmatrix} x_\alpha & z_\alpha \\ x_\beta & z_\beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_\alpha & t_\alpha \\ x_\beta & t_\beta \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x'_1(\alpha) & z'_1(\alpha) \\ x'_2(\beta) & z'_2(\beta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_1(\alpha) & t'_1(\alpha) \\ x'_2(\beta) & t'_2(\beta) \end{vmatrix}}, \quad (45.18)$$

при $\alpha=\beta$ получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = b(\alpha) = \frac{\begin{vmatrix} x'_1(\alpha) & z'_1(\alpha) \\ x'_2(\alpha) & z'_2(\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_1(\alpha) & t'_1(\alpha) \\ x'_2(\alpha) & t'_2(\alpha) \end{vmatrix}}. \quad (45.18')$$

Далее, из (45.14) имеем при $\alpha=\beta$

$$t'_1(\alpha)^2 - x'_1(\alpha)^2 - z'_1(\alpha)^2 = 0, \quad (45.19)$$

$$t'_2(\alpha)^2 - x'_2(\alpha)^2 - z'_2(\alpha)^2 = 0. \quad (45.19')$$

Запишем теперь искомое решение в форме

$$\mathbf{r}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} [\rho(\alpha) + \rho(\beta)] + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \pi(\lambda) d\lambda. \quad (45.20)$$

При этом из равенств (45.17) — (45.17'') следует, что вектор $\rho(\alpha)$ равен

$$\rho(\alpha) \equiv [0, \alpha, a(\alpha)], \quad (45.21)$$

а вектор $\pi(\alpha)$

$$\pi(\alpha) = [\pi_t(\alpha), \pi_x(\alpha), \pi_z(\alpha)] \quad (45.22)$$

определяется из равенств (45.12) и (45.19), (45.19'). Несложное вычисление приводит к результату

$$\pi_t(\alpha) = -\frac{1 + a'(\alpha)^2}{L}, \quad \pi_x(\alpha) = \frac{-a'(\alpha)b(\alpha)}{L}, \quad \pi_z(\alpha) = -\frac{b(\alpha)}{L}, \quad (45.23)$$

где

$$L(\alpha) = [1 + a'(\alpha)^2 - b(\alpha)^2]^{1/2}. \quad (45.23')$$

Величины π_t , π_x и π_z имеют простой физический смысл.

Действительно, при $t=0$

$$\pi_z = \pi(x, 0) = \frac{\partial L}{\partial \varphi_t} \quad (45.24)$$

есть импульс, канонически сопряженный полю φ ; далее,

$$\pi_x = G(x, 0) = -\pi(x, 0) a'(x) = \pi(x) \frac{\partial L}{\partial \varphi_x} \quad (45.25)$$

есть плотность количества движения поля φ , и, наконец,

$$\pi_t = H(x, 0) = \frac{\partial L}{\partial \varphi_t} \varphi_t - L = \pi_z \varphi_t - L \quad (45.26)$$

есть плотность энергии поля при $t=0$. Решение (45.20) можно теперь переписать в виде

$$t(\alpha, \beta) = \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [H(\lambda) - 1] d\lambda, \quad (45.27)$$

$$x(\alpha, \beta) = \frac{\beta + \alpha}{2} + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} G(\lambda) d\lambda, \quad (45.28)$$

$$z(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} [a(\alpha) + a(\beta)] + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \pi(\lambda) d\lambda. \quad (45.29)$$

Из этих решений следует, что переменные t , x и z , рассматриваемые как функции переменных α и β , зависят также от динамических переменных H , G , π , взятых на пространственной поверхности $t=0$. Зависимость t и x от этих динамических переменных является следствием того факта, что в случае нелинейного уравнения характеристические линии не являются прямыми линиями $\alpha=x-t$, $\beta=x+t$, а искривлены, и это искривление зависит от величины поля φ и его производных φ_x , φ_t .

Уравнения (45.27) — (45.29) можно переписать в виде

$$t(\xi, \tau) = \tau + \frac{1}{2} \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} [H(\lambda) - 1] d\lambda, \quad (45.27')$$

$$x(\xi, \tau) = \xi + \frac{1}{2} \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} G(\lambda) d\lambda, \quad (45.28')$$

$$z(\xi, \tau) = \frac{1}{2} [a(\xi + \tau) + a(\xi - \tau)] + \frac{1}{2} \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \pi(\lambda) d\lambda, \quad (45.29')$$

где

$$\beta = \xi + \tau, \quad \alpha = \xi - \tau, \quad \tau = \frac{1}{2}(\beta - \alpha), \quad \xi = \frac{\beta + \alpha}{2}. \quad (45.30)$$

Будем теперь рассматривать поле $\varphi(\xi, \tau) \equiv z(\xi, \tau)$ как гейзенбергов оператор $\hat{\varphi}(\xi, \tau)$ в пространстве $\mathfrak{H}_2(\xi, \tau)$, причем при $\tau=0$ правило квантования скалярного поля гласит:

$$[\hat{\varphi}(\xi, 0), \hat{\pi}(\xi, 0)] = \frac{1}{i} \delta(\xi' - \xi). \quad (45.31)$$

Такое квантование поля $\hat{\varphi}$ само собой ведет к квантованию величин t и x , которые становятся операторами. Действительно, x и t теперь не коммутируют с полем $\hat{\varphi}$. Чтобы показать это, образуем скобки Пуассона $[\hat{\varphi}(\xi, \tau), t(\xi', \tau)]$ и $[\hat{\varphi}(\xi, \tau), x(\xi', \tau)]$ и вычислим их, ограничиваясь первыми не исчезающими по величине $1/\varphi_0$ членами *).

*) Здесь снова масштаб поля φ_0 отличен от единицы и считается, что $\varphi_0 \gg |\varphi|$.

В этом приближении операторы $\hat{H}(\alpha)$ и $\hat{G}(\alpha)$ в (45.27'), (45.28') и (45.29') можно взять в линейном приближении:

$$\hat{G}(\alpha) = \frac{\partial a}{\partial \alpha} \hat{\pi}(\alpha), \quad (45.25')$$

$$\hat{H}(\alpha) - 1 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial a}{\partial \alpha} \right)^2 + \pi(\alpha)^2 \right\}. \quad (45.26')$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(\xi, \tau), t(\xi', \tau)] &= \\ &= \frac{1}{4\varphi_0^2} \int_{\xi'-\tau}^{\xi'+\tau} [a(\xi+\tau) + a(\xi-\tau), \hat{H}(\lambda)] d\lambda, \end{aligned} \quad (45.31')$$

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(\xi, \tau), x(\xi', \tau)] &= \\ &= \frac{1}{4\varphi_0^2} \int_{\xi'-\tau}^{\xi'+\tau} [a(\xi+\tau) + a(\xi-\tau), \hat{G}(\lambda)] d\lambda, \end{aligned} \quad (45.32)$$

где $\hat{G}(\alpha)$ и $\hat{H}(\alpha)$ взяты из (45.25') и (45.26') и восстановлена явно размерность формул введением явно масштаба градиента поля φ_0 .

Пользуясь теперь правилом перестановки (45.31) и замечая, что $a(\xi \pm \tau)$ получаются из $a(\xi)$ просто смещением координаты ξ на величину $\pm \tau$, найдем

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(\xi, \tau), t(\xi', \tau)] &= \\ &= \frac{1}{2\varphi_0^2 i} \int_{\xi'-\tau}^{\xi'+\tau} \pi(\lambda) \{ \delta[\lambda - (\xi + \tau)] + \delta[\lambda - (\xi - \tau)] \} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\varphi_0^2 i} \{ \pi(\xi + \tau) + \pi(\xi - \tau) \}, \end{aligned} \quad (45.33)$$

$$\begin{aligned} [\hat{\varphi}(\xi, \tau), x(\xi', \tau)] &= \\ &= \frac{1}{2\varphi_0^2 i} \int_{\xi'-\tau}^{\xi'+\tau} \frac{\partial a(\lambda)}{\partial \lambda} \{ \delta[\lambda - (\xi + \tau)] + \delta[\lambda - (\xi - \tau)] \} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\varphi_0^2 i} \left\{ \frac{\partial a(\xi + \tau)}{\partial \xi} + \frac{\partial a(\xi - \tau)}{\partial \xi} \right\}, \end{aligned} \quad (45.34)$$

причем правые части (45.33) и (45.34) следует заменить на 0, если переменная ξ лежит вне интервала

$$\xi' - 2\tau < \xi < \xi' + 2\tau. \quad (45.34')$$

Как известно, если две физические величины изображаются линейными эрмитовыми операторами \hat{A} и \hat{B} , а их коммутатор есть $\hat{C} = [\hat{A}, \hat{B}]$, то средние квадратичные отклонения $\overline{\Delta A^2}$, $\overline{\Delta B^2}$ величин A и B в любом состоянии подчиняются неравенству

$$\overline{\Delta A^2} \overline{\Delta B^2} \geq \frac{1}{4} |\overline{C^2}| \quad (45.35)$$

(см., например, [110]). На основании этого обобщенного соотношения неопределенностей из (45.33) и (45.34) получим соотношения для средних квадратичных отклонений $\overline{\Delta \varphi^2}$, $\overline{\Delta t^2}$ и $\overline{\Delta x^2}$:

$$\overline{\Delta \varphi(\xi, \tau)^2} \overline{\Delta t(\xi, \tau)^2} \geq \frac{1}{4\varphi_0^4} |\pi(\xi + \tau) + \pi(\xi - \tau)|^2, \quad (45.36)$$

$$\overline{\Delta \varphi(\xi, \tau)^2} \overline{\Delta x(\xi, \tau)^2} \geq \frac{1}{4\varphi_0^4} \left| \frac{\partial \varphi(\xi + \tau)}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi(\xi - \tau)}{\partial \xi} \right|^2. \quad (45.37)$$

Отсюда следует, что при $\tau > 0$ данной точке с координатами t и x не соответствует никакое определенное значение поля φ . Поле φ оказывается определенным не в пространстве $\mathfrak{R}_2(x, t)$, а в пространстве $\mathfrak{R}_2(\xi, \tau)$. В силу этого обстоятельства при $\tau > 0$ точке пространства $\mathfrak{R}_2(\xi, \tau)$ не соответствует никакая определенная точка в пространстве $\mathfrak{R}_2(x, t)$ *).

Из правил коммутации также видно, что «квантование» пространства—времени $\mathfrak{R}_2(x, t)$ возникает только в той области пространства—времени $\mathfrak{R}_2(\xi, \tau)$, где нелинейность велика. При $\frac{1}{\varphi_0} \pi(\xi) \rightarrow 0$ и $\frac{1}{\varphi_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \rightarrow 0$ переменные φ , t и x коммутируют, так как t и x становятся опять C -числами.

Рассмотренный в этом разделе пример нелинейного поля интересен с той точки зрения, что квантование пространства—времени не привносится извне, а вытекает из самой динамики нелинейного поля.

*) Однако в рассматриваемом приближении x и t коммутируют.

§ 46. Заключительные замечания теоретического характера

Идея этой монографии покоится на предположении, что \hat{S} -матрица, асимптотически описывающая микроявления, сохранит свое значение и в будущей теории.

Это предположение не противоречит тому, что методы конструирования этой матрицы могут подвергнуться принципиальным изменениям и могут существенно отличаться от современных методов, будь они основаны на традиционном представлении о лагранжиане взаимодействия локальных полей или на более абстрактных понятиях, характерных для аксиоматического подхода.

Второе предположение, которое мы существенно использовали, это предположение о справедливости современной теории свободных частиц. Иными словами, мы предполагали, что современная теория асимптотически, для больших расстояний между частицами, правильно отображает физическую реальность.

Эти предположения послужили нам основой для обсуждения возможных отклонений от современной теории, отклонений, относящихся к области особо малых масштабов пространства и времени. Мы рассмотрели два принципиально различных класса возможных модификаций современной теории, которые условно характеризовали с помощью временного вектора n , «внутреннего» или «внешнего» (см. § 39).

Мы обратимся сейчас к первому классу. В этом классе сохраняется современное представление об однородности и изотропности пространства и времени. Вместе с тем асимптотические импульсное пространство $\mathfrak{H}_3(p)$ (см. § 31) и пространство—время $\mathfrak{H}_4(x)$ сохраняются в том виде, в котором они знакомы нам из современной теории. Возможные отклонения от современной локальной теории

поля носят в этом случае сами по себе *локальный* характер, т. е. сосредоточиваются в малой пространственно-временной области (объемом $\sim a^4$, если под a разуметь «элементарную» длину) в окрестности взаимодействующих частиц. С помощью рассмотренных схем локального нарушения микропричинности (ср. §§ 36—40) мы стремились очертить «магический» круг—ту пространственно-временную область, ситуация внутри которой, может быть, могла бы быть описана только посредством принципиально новых понятий, выходящих за пределы наших современных представлений. Поэтому рассмотренные нами теоретические схемы носят характер моделей. Этот модельный характер выражается в том, что для локализации акаузальности мы обращались к пространственно-временному описанию с помощью переменных x и t , которые определены для свободных и точечных частиц. «Полноправность» этих переменных применительно к малым расстояниям и к малым промежуткам времени может подвергаться сомнению.

Однако логическая последовательность этих моделей поддерживалась тем, что обращение к пространственно-временному описанию было необходимо нам лишь как прием, позволяющий заручиться гарантией того, что макроскопическая причинность осталась ненарушенной.

После этого мы вновь возвращались в импульсное пространство, построив таким путем акаузальную \hat{S}_a -матрицу, близкую к некоторой исходной каузальной матрице \hat{S} . Модельный характер рассмотренных акаузальных схем делает особенно острой проблему экспериментального изучения фактов, которые могли бы указывать на неполноту обычной локальной теории.

§ 47. Экспериментальные следствия локальной акаузальности

Важнейшими следствиями *локальной акаузальности* является изменение аналитических свойств, характерных для локальной амплитуды рассеяния $T(\omega)$. В силу этого возникают отклонения от обычных дисперсионных соотношений. По этой же причине нарушаются соотношения между асимптотическими сечениями (см. §§ 30, 38). Эти следствия акаузальной теории могут быть проверены на опыте. Для экспериментальной проверки дисперсионных

соотношений необходимо, чтобы они содержали только известные из опыта величины и не содержали величин ненаблюдаемых.

Этим необходимым свойством обладают дисперсионные соотношения для амплитуды упругого рассеяния вперед π -мезонов на нуклонах. Поэтому только это рассеяние пригодно для проверки такого принципиального пункта теории, как микропричинность. Соответствующие дисперсионные соотношения были приведены в § 30. Сравнивать с опытом можно только дисперсионные соотношения для заряженных мезонов, т. е. для амплитуд $D_1(\omega)$ и $D_2(\omega)$ (см. § 30, формулы (30.32') и (30.32'')).

В качестве точки вычитания ω_0 обычно принимают энергию покоящегося мезона, так что $\omega_0 = m$, $D_1(\omega) = D_1(m)$. Если в формулах (30.32') и (30.32'') выразить абсорбционные части амплитуд A_1 и A_2 при помощи оптической теоремы (см. (XIII.4)) через полные сечения σ_+ и σ_- , то эти формулы могут быть представлены в виде

$$D_1(\omega) = D_1(m) + \frac{f^2}{M} \frac{k^2}{\omega^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{m}{2M}\right)^2} + \\ + \frac{k^2}{4\pi} \int_m^\infty \frac{d\omega'}{k'} \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} (\sigma_+(\omega') + \sigma_-(\omega')), \quad (47.1)$$

$$D_2(\omega) = \frac{f^2}{M} \frac{2k^2}{\omega^2 - \left(\frac{m^2}{2M}\right)^2} \frac{\omega M}{m^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{m}{2M}\right)^2} + \\ + \frac{k^2 \omega}{4\pi} \int_m^\infty \frac{d\omega'}{k'} \frac{1}{\omega'^2 - \omega^2} (\sigma_+(\omega') - \sigma_-(\omega')). \quad (47.1')$$

Здесь $k^2 = \omega^2 - m^2$, где k — импульс мезона, а константа $f^2 = (g^2/4) (m^2/M^2) = 0,081$ и определяется из опытов по рассеянию π^+ -мезонов низкой энергии.

Наибольшую трудность при сравнении с экспериментальными данными представляет экстраполяция полного сечения $\sigma_\pm(\omega)$ для крайне высоких энергий; эта экстраполяция необходима для выполнения интегрирования в (47.1) и (47.1').

Экстраполяционная формула гласит:

$$\sigma_\pm = a + \frac{b}{k^n}; \quad (47.2)$$

постоянные a , b и показатель n подбираются на основании опытных данных (см. [111—114]). Первые опыты по определению действительной части амплитуды рассеяния на крайне малые углы $D(\omega)$ были сделаны в Дубне [115, 116]. Анализ экспериментальных данных и сравнение их с результатами вычислений по дисперсионным соотношениям (47.1) и (47.1') с помощью экстраполяционной формулы (47.2) производились в работах [111—114]*).

В настоящее время наиболее полные данные получены в работе [148]. На рис. 47 приведены экспериментальные данные для отношения действительной части амплитуды к мнимой $\alpha = D(\omega)/A(\omega)$ в функции импульса мезонов k . Сплошные кривые—результат вычислений величины α с помощью дисперсионных соотношений (47.1) и (47.1') и экстраполяционной формулы для σ_{\pm} (47.2). Из этих кривых следует, что дисперсионные соотношения, выведенные на основании локальной (каузальной) теории, находятся в хорошем согласии с опытом вплоть до импульсов π -мезонов $k \approx 20 \div 26$ ГэВ/с**).

Обратимся теперь к дополнительным членам, обусловленным локальной акаузальностью амплитуды (см. § 38). Согласно формулам (38.13) и (38.13') мы можем написать

$$D_{a1}(\omega) = D_1(\omega) + \psi_1(\omega), \quad (47.3)$$

$$D_{a2}(\omega) = D_2(\omega) + \psi_2(\omega), \quad (47.3')$$

где слева $D_{a1}(\omega)$ и $D_{a2}(\omega)$ —акаузальные амплитуды; амплитуды $D_1(\omega)$ и $D_2(\omega)$ вычисляются по формулам

*) В настоящее время используется несколько иная параметризация полных сечений. А именно, вместо (47.2) можно записать

$$\sigma^{\pm} = (\sigma_+ \pm \sigma_-)/2 \quad (\sigma_+ \rightarrow \pi^+ p, \quad \sigma_- \rightarrow \pi^- p).$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma^+ (k) &= \sigma_0 + \sigma_1 [\ln(k/k_1)]^2 + bk^{\alpha-1}, \\ \sigma^- (k) &= ck^{\alpha\rho-1} \end{aligned} \right\} k \geq 10 \text{ ГэВ/с.}$$

Постоянные σ_0 , σ_1 , k_1 , b , α , $\alpha\rho$ и c —определяются из сравнения с экспериментальными данными. (Прим. ред.)

**) Эксперименты, выполненные в ФНАЛ, позволяют сделать вывод о справедливости дисперсионных соотношений по крайней мере до значений $k=100$ ГэВ/с (см. [149]). (Прим. ред.)

(47.1), (47.1'); ψ_1 и ψ_2 означают дополнительные, акаузальные члены*). В дополнении XVI (формулы

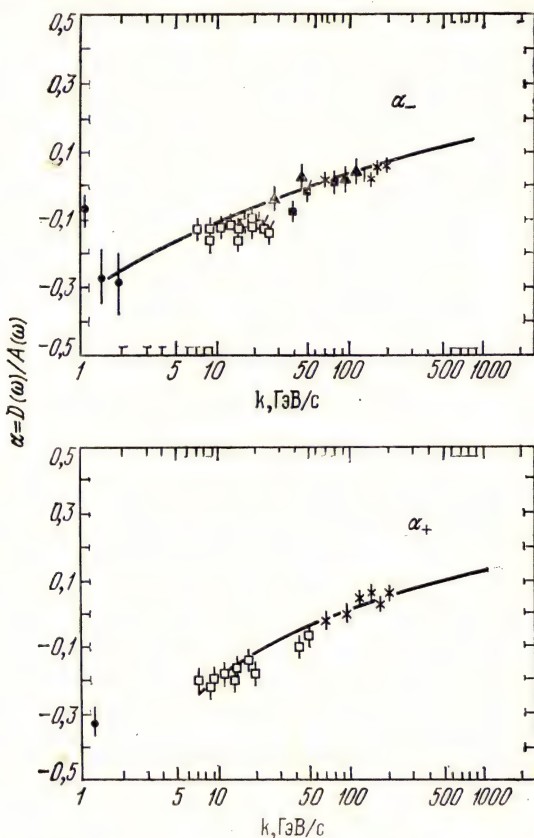


Рис. 47. Отношение α действительной части амплитуды рассеяния к мнимой. Кривые вычислены по дисперсионным соотношениям (47.1) и (47.1') с помощью экстраполяционной формулы (47.2) [148].

(XVI.11') и (XVI.12)) произведено необходимое преобразование формул (38.13) и (38.13'), в результате чего

*) Напомним, что ω означает энергию мезона в лабораторной системе отсчета.

получено

$$\psi_1(\omega) = \frac{\omega^2 - m^2}{4\pi\sqrt{M^2 + m^2}} \tilde{\rho}(\omega) (\sigma_+(M) + \sigma_-(M)), \quad (47.4)$$

$$\psi_2(\omega) = -\frac{\omega^2 - m^2}{M^2 + m^2} \tilde{\rho}(\omega) \frac{\omega}{M} (D_+(M) + D_-(M)), \quad (47.4')$$

где $\sigma_{\pm}(M)$ суть полные сечения при $\omega = M$, а $D_{\pm}(M)$ — действительные части амплитуды в точке $\omega = M$.

Как видно, при $\omega \geq M$ эти поправки к действительным частям амплитуды рассеяния $D(\omega)$ становятся весьма

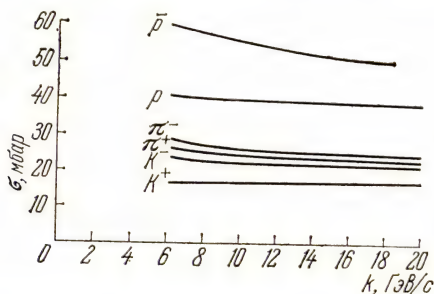


Рис. 48. Полные сечения для процессов $p\bar{p}$, $p\bar{p}$, $K^{\pm}p$, $\pi^{\pm}p$ в функции импульса (по данным [117, 118]).

существенными, поэтому они были бы замечены в описанных опытах, если бы элементарная длина $a = 1/M$ была больше 10^{-16} см.

Обратимся теперь к экспериментальной проверке равенства полных асимптотических сечений (см. § 30).

На рис. 48 приведены кривые полных сечений для столкновений $p\bar{p}$, $p\bar{p}$, $\pi^{\pm}p$, $K^{\pm}p$ по данным [117, 118]. Как видно из этих кривых, асимптотические равенства сечений, предсказываемые локальной теорией (ср. (30.36), (30.37)), при импульсе частиц до 20 ГэВ/с еще не осуществляются.

Является ли это расхождение эксперимента и теории следствием недостаточности доступных величин энергии частиц или уже может рассматриваться как указание на неполноту локальной теории, пока остается открытым вопросом. Некоторые кривые ($K^{\pm}p$) как будто подчерки-

вают, что имеется тенденция стремления к разным пределам. Дальнейшее исследование предельных сечений

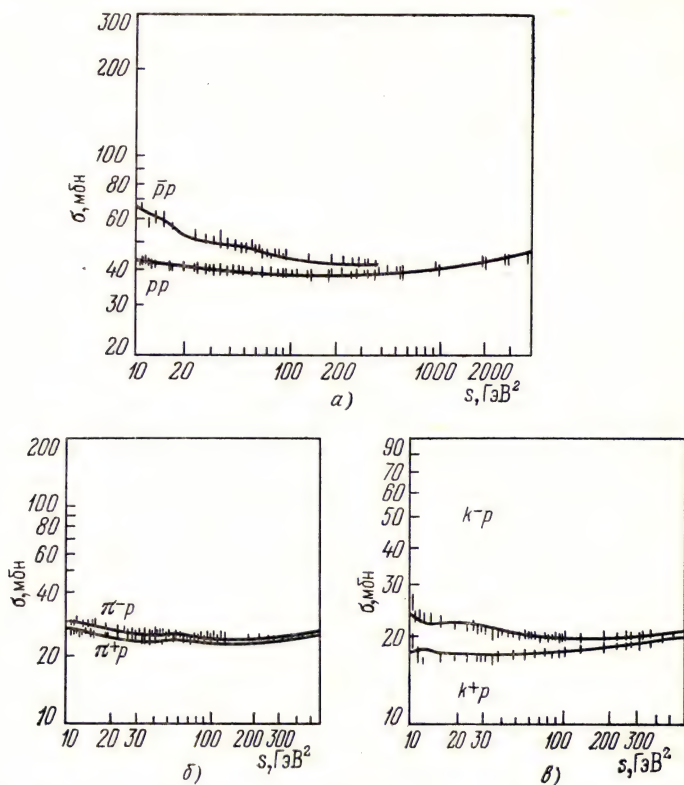


Рис. 49. Полные данные по сечениям для столкновений $\bar{p}p$, pp (а); $\pi^\pm p$ (б); $K^\pm p$ (в) [150, 151].

представляет собой исключительно важную задачу для будущих ускорителей (рис. 49) *).

*) На рис. 49 приведены более новые данные по полным сечениям для столкновений $\bar{p}p$, pp , $\pi^\pm p$ и $K^\pm p$ при значительно больших импульсах частиц [150, 151]. На этом рисунке видна явно выраженная тенденция к асимптотическому равенству сечений указанных процессов. Это подтверждает предсказания локальной теории.

Квантовая электродинамика является классическим образцом локальной теории. Поэтому в последние годы немало усилий было приложено к тому, чтобы обнаружить отступления от предсказаний этой теории.

Одним из важнейших критериев справедливости квантовой электродинамики является измерение множителя Ланге g , определяющего отношение магнитного момента частицы к ее механическому моменту. Для электрона и μ^\pm -мезона этот множитель близок к 2.

Экспериментальные данные для μ -мезона могут быть резюмированы формулой [121]

$$\frac{1}{2}(g-2)_{\text{эксп}} = \frac{1}{2}(g-2)_{\text{теор}} \pm 0,6 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2, \quad (47.5)$$

где $\alpha = e^2/\hbar c$ есть постоянная тонкой структуры. Указанное в (47.5) отклонение от предсказания локальной квантовой электродинамики формально можно описать с помощью изменения μ -мезонной функции распространения $\tilde{D}_c(q)$ (здесь q — передаваемый импульс). Для этого заменим локальную функцию $\tilde{D}_c(q)$ на нелокальную $\tilde{D}_c(q, a)$ посредством формулы

$$\tilde{D}_c(q) = \frac{1}{q^2 - m_\mu^2} \rightarrow \tilde{D}_c(q, a) = \tilde{D}_c(q) - \frac{1}{q^2 - m_\mu^2 - \frac{1}{a^2}}. \quad (47.6)$$

В этой формуле нелокальность введена с помощью последнего члена, содержащего малую длину a , ($a \ll 1/m_\mu$, m_μ — масса μ -мезона *). Чтобы получить соответствие с опытными данными, надо, чтобы длина a была $< 10^{-14}$ см.

Экспериментальные данные показывают, что множитель Ланде $g-2$ для электронов с высокой степенью точности совпадает с этим же множителем для μ -мезонов. Различия относятся к членам порядка $(\alpha/\pi)^3$. Однако в той области, где становятся существенными члены столь высокого порядка, квантовая электродинамика перестает быть замкнутой теорией: возникает необходимость учитывать эффект сильных взаимодействий, а в случае существования промежуточного бозона — учитывать также и слабые взаимодействия [121].

*) Эта оценка приведена в работе [122] и является условной, так как замена (47.6) может служить лишь для оценки возможных нелокальных эффектов и не претендует на строгость.

В связи с проверкой квантовой электродинамики изучалось рождение пар (e^+e^-) и пар ($\mu^+\mu^-$) при большой передаче импульса [121], а также упругое рассеяние электронов и мезонов на протонах (при передаче импульса q до нескольких ГэВ/с) [145]. Основной вывод из этих экспериментов сводится к тому, что очевидных отступлений от предсказаний локальной квантовой электродинамики не обнаруживается вплоть до $a < 10^{-14}$ см.

Многозначительным является тот факт, что в пределах этих же масштабов не обнаруживается различия в свойствах μ -мезона и электрона, несмотря на большое различие их масс ($m_\mu/m_e \sim 200$) [145]. Этот факт может служить указанием на то, что различие масс электрона и мезона должно быть отнесено к пространственно-временным областям порядка 10^{-15} см (или меньше!). Существенно, что оценка масштаба нелокальности a , основанная на изучении μp -рассеяния, данная в работе [114], приводит к значениям $a = 1/M \approx 10^{-16}$ см. Поэтому становится вероятным, что масса частиц определяется не столько сильным и электромагнитным взаимодействиями, сколько слабым, которое, видимо, играет более фундаментальную роль [144—146]. Напомним, что длина a , характерная для слабых взаимодействий (см. § 22), равна $a = \Lambda_F \approx 10^{-16}$ см.

Современная локальная теория приводит к знаменитой *CPT*-теореме, согласно которой применение операций зарядового сопряжения \hat{C} , пространственной четности \hat{P} и обращения времени \hat{T} не меняет состояния элементарных частиц. Формально это записывается равенством

$$\hat{C}\hat{P}\hat{T} = 1. \quad (47.7)$$

Операция $\hat{C}\hat{P}$ называется операцией *комбинированной четности*.

Существенная связь трех операций видна уже и из того факта, что в диаграммной технике Фейнмана античастицы можно рассматривать как частицы, движущиеся во времени в обратном направлении [127]. Более глубокие основания равенства (47.7) лежат в правильной связи статистики частиц с их спином [128]. В аксиоматическом подходе к квантовой теории поля *CPT*-теорема доказывается исходя из локальной причинности, положительности энергии частиц и лоренцевской инвариантности [129].

Нарушение *CPT*-теоремы означало бы нарушение основных принципов локальной теории и могло бы быть связано с возможными изменениями принципа причинности в микромире или, более общо, геометрии микромира.

Однако *CPT*-инвариантность, видимо, соблюдается с большей степенью точности. Одним из следствий этой инвариантности является утверждение о равенстве масс частиц m и античастиц \bar{m} . В настоящее время очень точно измерялась разность масс K_L - и K_S -мезонов. Из этих измерений можно вывести заключение, что $\left| \frac{\bar{m}_K - m_K}{m_K} \right| \leq 10^{-14}$; этот результат указывает на весьма строгое соблюдение операторного равенства (47.7).

Из *CPT*-теоремы следует также равенство времен жизни частиц τ и античастиц $\bar{\tau}$. Действительно, масса нестабильных частиц есть комплексная величина $m = m_0 + i \frac{\lambda}{2}$, здесь λ — константа распада. Поэтому равенство τ и $\bar{\tau}$ так же следует из *CPT*-теоремы, как и равенство масс m и \bar{m} . Произведенные до сих пор сравнительные измерения времен распада π^+ - и π^- -мезонов приводят к результату

$$\frac{\tau^+}{\tau^-} - 1 = 0,064 \pm 0,069,$$

т. е. с доступной сейчас точностью эти времена оказываются равными [147].

Другим указанием на соблюдение *CPT*-теоремы может служить совпадение множителей Ланде g , точнее, величины $(g-2)$ для μ^- - и μ^+ -мезонов, именно [145]: $(g-2)_+ = (1162 \pm 5) \cdot 10^{-6}$, а $(g-2)_- = (1165 \pm 3) \cdot 10^{-6}$. Поэтому пока разумнее считать, что $\hat{C}\hat{P}\hat{T} = 1$. Сложнее обстоит дело с комбинированной четностью $\hat{C}\hat{P}$. Несколько лет тому назад было обнаружено несохранение этой четности при распаде долгоживущего K_L -мезона (K_S^0 -мезона) на два π -мезона [123, 124]. Если через K^0 обозначить состояния K^0 -мезона, а через \bar{K}^0 — состояние анти- K^0 -мезона, то короткоживущее состояние K -мезона (K_1^0) будет

$$K_S = \frac{1}{\sqrt{2}} (K^0 + \bar{K}^0), \quad (47.8)$$

а состояние долгоживущее (K_2^0) —

$$K_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (K^0 - \tilde{K}^0). \quad (47.8')$$

Первое из этих состояний есть состояние четное относительно операции $\hat{C}\hat{P}$, второе состояние — нечетное. С другой стороны, состояние пары мезонов ($\pi^+\pi^-$) относительно $\hat{C}\hat{P}$ -четное. Действительно, операция четности \hat{P} меняет знак состояния π -мезона в силу его псевдоскалярности и меняет направление радиуса-вектора, соединяющего два мезона. В силу этого волновая функция, описывающая состояние пары мезонов, приобретает множитель $(-1)^l$ (здесь l — орбитальный момент). При зарядовом сопряжении \hat{C} совершается замена $\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$ благодаря чему появляется второй множитель $(-1)^l$.

Таким образом, четность состояния $\pi^+\pi^-$ доказана. В силу этого распад

$$K_L \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (47.9)$$

запрещен, если $\hat{C}\hat{P}$ -четность сохраняется.

В опыте, описанном в работе [123], которая впервые была доложена на Международной конференции в Дубне в 1964 г., было показано, что распады типа (47.9) все же имеют место, хотя и с малой степенью вероятности: отношение вероятностей распадов

$$\frac{K_L \rightarrow \pi^+ + \pi^-}{K_S \rightarrow \pi^+ + \pi^-} \approx 2 \cdot 10^{-3}. \quad (47.10)$$

Обнаружено нарушение $\hat{C}\hat{P}$ -четности при распаде K -мезона на π -мезон и лептоны в реакциях [126]

$$K_L \rightarrow \pi^- + \mu^+ + \nu, \quad (47.11)$$

$$K_L \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \tilde{\nu}, \quad (47.11')$$

и

$$K_L \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu, \quad (47.12)$$

$$K_L \rightarrow \pi^+ + e^- + \tilde{\nu}. \quad (47.12')$$

Асимметрия наблюдалась в том, что реакции (47.11) и (47.12) оказались предпочтительнее, чем реакции (47.11')

и (47.12'). Между тем, в силу четности K_L -мезона по отношению к операции $\hat{C}\hat{P}$, реакции (47.11) и (47.11') и соответственно (47.12) и (47.12') должны бы происходить с одинаковой скоростью.

Нарушение $\hat{C}\hat{P}$ -четности могло бы означать либо нарушение $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$ -теоремы (47.7), либо неинвариантность физических явлений относительно операции инверсии времени \hat{T} , т. е. несимметрию прошедшего и будущего. Эта несимметрия хорошо известна в области макроскопических явлений и вообще в повседневной жизни, но совершенно непривычна в механике и в теории поля [130].

В какой мере нарушение $\hat{C}\hat{P}$ -четности (а следовательно, и асимметрия времени) может быть связано с проблемами причинности и геометрии микромира, существенным образом зависит от степени общности нарушения $\hat{C}\hat{P}$ -инвариантности *).

Пока еще не найдено других явлений, кроме распада K -мезонов, в которых обнаруживалось бы несохранение $\hat{C}\hat{P}$ -четности. Этот факт препятствует развитию геометрической точки зрения на явление несохранения $\hat{C}\hat{P}$.

§ 48. Экспериментальные следствия моделей с «внешним» вектором

Обратимся теперь к другому классу моделей, который по нашей классификации мы относим к классу моделей с *внешним* вектором n .

В этих моделях, в отличие от случая локальной акausalности, лоренцевская инвариантность нарушается и становится в том или ином смысле приближенной. Это отступление от лоренцевской инвариантности обуславливается либо выделением той или иной системы отсчета, как это имеет место в некоторых моделях стохастического пространства (см. § 41), либо нарушением однородности и изотропности пространства—времени, как это характерно для моделей с дискретным или квантованным пространством—временем (см. § 42).

*) В этой связи см. работы [132, 133].

В § 44 были рассмотрены нулевые колебания (флуктуации) скалярного поля $\varphi(x)$, порождающие флуктуации метрического тензора $g_{\mu\nu}$.

В обычном понимании вакуума эти флуктуации, так же как и флуктуации заряда вакуума, не нарушают однородности и изотропности пространства—времени, так как в любой точке пространственно-временного континуума $\mathfrak{N}_4(x)$ они протекают одинаковым образом. Однако возможен и другой взгляд на физический вакуум, более старомодный, согласно которому вакуум представляет собой выделенную в нашей Вселенной систему отсчета. Сколь бы невероятными ни казались эти предположения, логически они не могут быть исключены из рассмотрения.

В частности, в работе [105] было обращено внимание на то обстоятельство, что по мере возрастания масштабов число реальных систем отсчета, допустимых в качестве инерциальных, существенно сокращается. Действительно, для частиц, движущихся, например, в атомном ядре, ускорения достигают величины 10^{32} см/с², для макроскопических систем они порядка 10^8 см/с², для планет они порядка 1 см/с², а для звезд или галактик эти ускорения составляют лишь 10^{-8} см/с². Поэтому, если для атомных систем все макроскопические системы являются инерциальными, то для больших систем трудно указать систему более инерциальную, нежели система, связанная со звездами или галактиками. Имея в виду известное расширение видимой Вселенной, было бы более правильно рассматривать системы отсчета, локально покоящиеся и медленно меняющиеся по мере перехода к более удаленным галактикам. Весьма возможно, что такой «наинерциальнейшей» системой отсчета может служить система, покоящаяся относительно недавно открытого «реликтового» излучения, наполняющего нашу Вселенную.

После этих общих замечаний вернемся вновь к микромиру и для определенности рассмотрим упругое рассеяние частиц.

Это рассеяние в обычной локальной теории полностью характеризуется амплитудой рассеяния $A(s, t)$, зависящей от двух инвариантов $s=P^2$ и $t=q^2$ (P —полный импульс частиц, q —импульс, переданный при рассеянии). Если существует некоторый «внешний» времениподобный единичный вектор n , то амплитуда рассеяния A может

еще дополнительно зависеть от двух инвариантов $\alpha = a(n, P)$ и $\beta = a(n, q)$, где a — элементарная длина. Таким образом,

$$A = A(s, t, \alpha, \beta). \quad (48.1)$$

Предположим теперь, что лабораторная система почти покоится относительно некоторой «привилегированной» системы отсчета (системы, выделенной неоднородностями пространства—времени, наибольшей инерциальностью и т. д.), так что в лабораторной системе $n = (1, 0, 0, 0)$; в этой системе отсчета $\alpha = aE$, $\beta = aq_0$. Рассмотрим теперь в той же системе отсчета упругое рассеяние во встречных пучках. В частности, если центр масс сталкивающихся частиц покоится, то $\alpha = a \sqrt{\frac{(E_0 + m)m}{2}}$, $\beta = 0$, а m есть масса покоя частицы.

Таким образом, рассеяние в лабораторной системе и рассеяние в системе центра масс будут различны. Разумеется, что это различие может стать заметным лишь при достаточно большой энергии сталкивающихся частиц (или при достаточно большом переданном импульсе). В противном случае $\alpha \approx \beta \approx 0$ и $A \approx A(s, t, 0, 0)$.

Что говорит по поводу такой возможности опыт? Весьма точные данные имеются по знаменитому теперь распаду $K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, который обстоятельно промерен при двух энергиях.

Вероятность рассматриваемого распада dW , согласно локальной теории, есть функция двух инвариантов $s = P^2$ и $r = Pp_1 = P^2 - Pp_2$, где P — четырехмерный импульс K_2^0 -мезона, а p_1 и p_2 — импульсы π^\pm -мезонов:

$$dW \equiv dW(s, r). \quad (48.2)$$

Эта вероятность пересчитывается обычным образом из одной системы отсчета в другую, в частности, будучи известна для покоящегося мезона, она может быть вычислена для мезона движущегося простым пересчетом инвариантов s и r .

Критерием справедливости такого преобразования, основанного на обычной кинематике теории относительности, может служить инвариантность массы покоя рас-

падающего K^0 -мезона. Опыты, произведенные при энергиях K^0 -мезона $E_0 = 1 \text{ ГэВ}$ [134] и $E_0 = 10,7 \text{ ГэВ}$ [135], показывают, что разброс Δm_K возможных значений массы покоя мезона m_K в первом случае составляет $\sim 0,7\%$, а во втором $\sim 1\%$ при одном и том же среднем значении m_K . Таким образом, эти опыты показывают, что релятивистская кинематика в области нескольких ГэВ соблюдается с точностью $\sim 1\%$.

В физике прошлого столетия фундаментальное значение имели законы сохранения. Современная теория придает симметриям и групповым свойствам более фундаментальное значение.

Законы сохранения с этой точки зрения являются следствием определенных симметрий. В частности, законы сохранения энергии—импульса и момента количества движения являются следствием однородности и изотропности пространства—времени. Нарушения такой однородности и изотропности должны были бы приводить и к нарушениям законов сохранения. В этой связи уместно напомнить, что в общей теории относительности, оперирующей с неоднородным пространством Римана, не существует локального закона сохранения энергии—импульса.

Поэтому представляется интересным знать, с какой точностью и обстоятельностью доказаны законы сохранения энергии и импульса применительно к миру элементарных частиц, особенно в области высоких энергий. Оказывается, что ответить на этот вопрос нелегко, так как значимость этих фундаментальных законов признается самоочевидной и по этой причине специальные опыты для проверки их не ставились.

Между тем нужно ясно представлять себе, что возможное нарушение этих законов могло бы быть следствием нарушения однородности и изотропности пространства—времени в микромире, и вряд ли есть основания делать идею об однородности и изотропности пространства—времени предметом веры физиков.

Какие же сведения о законах сохранения можно почерпнуть из современного эксперимента в области высоких энергий? Оказывается, что наиболее точные данные могут быть получены из изучения упругих столкновений протонов. Оказывается, что релятивистские законы сохра-

нения энергии — импульса при упругом столкновении протонов

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2, \quad (48.3)$$

$$E(p_1) + E(p_2) = E(p'_1) + E(p'_2) \quad (48.3')$$

(здесь p_1, p_2 — импульсы протонов до столкновения, p'_1, p'_2 — их импульсы после столкновения, $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ — энергия протона) соблюдаются в интервале $E = 2 \div 10$ ГэВ в пределах точности около 3%.

Соответствующая длина волны в лабораторной системе координат составляет $\lambda \sim 10^{-15}$ см. Далее, можно считать достаточно убедительно установленным, что резких скачкообразных нарушений кинематики (48.3) и (48.3') на уровне 10% нет, но они могли бы быть на уровне 3% [136]. Однако по этому вопросу нет никаких опытных данных.

Между тем, если существует какая-либо неоднородность пространства — времени, связанная с ультрамалыми масштабами, порядка a , то ожидаемые нарушения законов сохранения должны быть значительными, $\Delta E \sim \hbar c/a$, $\Delta p \sim \hbar/a$, хотя, быть может, и редкими. Такая ситуация возникает в теории «квазичастиц», рассмотренной в § 43. Очевидно, что подобные нарушения трудно отличить от процессов с участием нейтральных частиц: в тех случаях, когда имела бы утечка энергии и импульса, возникала бы естественная возможность интерпретировать событие как результат рождения нейтральных частиц. Поэтому более интересным было бы наблюдение случаев спонтанного увеличения энергии — импульса в условиях достаточной защиты от внешних нейтральных излучений.

Дополнение I (к §§ 14 и 16)

Сингулярные функции в теории поля. Функция $D(x)$ в (14.4) (и такая же функция в (16.3)) возникает из четырехмерного интеграла

$$I(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ikx}}{k^2 - m^2} d^4k, \quad (I.1)$$

где, как обычно, $d^4k = dk_0 d^3k$, $kx = k_0 t - \mathbf{kx}$, $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2$ в «бозонном» обозначении; для фермионов мы будем употреблять вместо вектора k вектор p .

Подынтегральное выражение в (I.1) имеет полюсы в точках

$$k_0 = \pm \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} = \pm \omega \quad (I.2)$$

(или, для фермионов, в точках $k_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \pm E$). Поэтому результат интегрирования в (I.1) по dk_0 зависит от выбора в комплексной плоскости переменной k_0 контура, по которому обходят эти полюсы.

Различные возможности изображены на рис. 50. В частности, функции $D(x)$ соответствует контур C_0 .

Ниже мы приводим список сингулярных функций и явные выражения, возникающие из интеграла (I.1) в зависимости от выбора контура интегрирования.

1. Функция $D(x)$ — «перестановочная»; контур интегрирования C_0 . Эта функция имеет вид

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ikx} \frac{\sin \omega t}{\omega} d^3k = \\ &= \frac{1}{2\pi} \varepsilon(t) \left\{ \delta(x^2) + \frac{m^2}{2} \frac{J_1(m\sqrt{x^2})}{m\sqrt{x^2}} \theta(x^2) \right\}, \quad (I.3) \end{aligned}$$

где $x^2 = t^2 - x^2 = t^2 - r^2$ (считая $c=1$), $J_1(z)$ есть функция Бесселя. При этом

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= 1, \quad \xi > 0, & \varepsilon(\xi) &= +1, \quad \xi > 0, \\ \theta(\xi) &= 0, \quad \xi < 0, & \varepsilon(\xi) &= -1, \quad \xi < 0. \end{aligned} \quad (I.4)$$

2. Функция $D_c(x)$ — «причинная»; контур интегрирования Γ_c . Явное выражение для этой функции имеет вид

$$D_c(x) = \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) - \frac{m}{8\pi \sqrt{x^2}} \theta(x^2) [J_1(m\sqrt{x^2}) - iN_1(m\sqrt{x^2})] + \theta(x^2) \frac{im}{4\pi^2 \sqrt{x^2}} K_1(m\sqrt{x^2}). \quad (I.5)$$

Здесь $J_1(z)$, $N_1(z)$, $K_1(z)$ — функции Бесселя в обычных обозначениях.

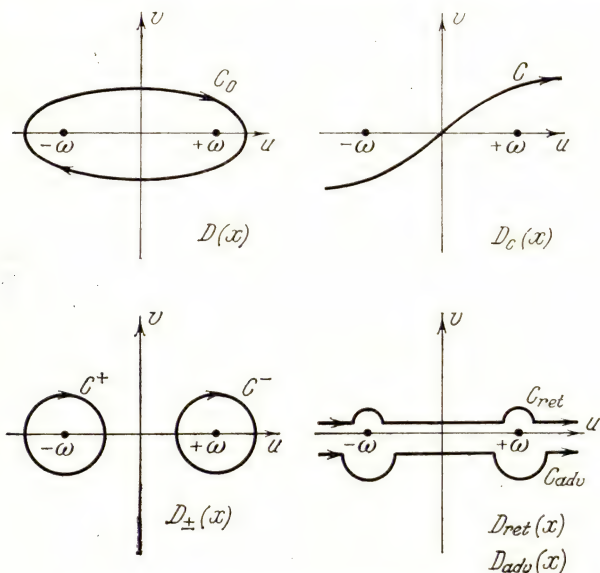


Рис. 50. Различные контуры интегрирования в комплексной плоскости $k_0 = u + iv$ для получения сингулярных функций D , D_c , D_{\pm} , D_{ret} , D_{adv} .

Функция D_c при $m=0$ принимает вид

$$D_c(x) = \frac{1}{2\pi} \delta^+(x^2), \quad (I.6)$$

где

$$\delta^+(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{i\omega(z+i\varepsilon)} d\omega = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{z+i\varepsilon} \quad (I.7)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Подобным же образом

$$\delta^-(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-i\omega(z-i\varepsilon)} d\omega = \frac{-i}{2\pi} \frac{1}{z-i\varepsilon} \quad (I.8)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Эти формулы эквивалентны такой форме записи:

$$\delta^\pm(z) = \frac{1}{2} \left[\delta(z) \pm \frac{i}{\pi} \frac{1}{z} \right], \quad (I.9)$$

пригодной при интегрировании по действительной оси, если при интегрировании члена $1/z$ брать главное значение интеграла около $z=0$.

3. При интегрировании по контурам C^+ и C^- возникают функции $D_\pm(x)$:

$$D_\pm(x) = \frac{1}{2} \{ D(x) \pm iD_1(x) \}, \quad (I.10)$$

где функция $D_1(x)$ получается при интегрировании по контуру C_1 , причем в явной форме:

$$D_1(x) = \begin{cases} \frac{m^2 K_1(m \sqrt{x^2})}{2\pi^2 m \sqrt{x^2}} & \text{при } x^2 > 0, \\ \frac{m^2 N_1(m \sqrt{x^2})}{2\pi^2 m \sqrt{x^2}} & \text{при } x^2 < 0. \end{cases} \quad (I.11)$$

$$(I.11')$$

4. Наконец, при интегрировании по контурам C_{ret} и C_{adv} возникают функции $D_{\text{ret}}(x)$ и $D_{\text{adv}}(x)$, совпадающие с функцией Грина для неоднородного уравнения:

$$(\square - m^2) D_{\text{ret}}(x) = -\delta(x), \quad (I.12)$$

$$(\square - m^2) D_{\text{adv}}(x) = -\delta(x), \quad (I.12')$$

$$D_{\text{ret}}(x) = \begin{cases} D(x) & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (I.13)$$

$$(I.13')$$

$$D_{\text{adv}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } t > 0, \\ D(x) & \text{при } t < 0; \end{cases} \quad (I.14)$$

$$(I.14')$$

$D_{\text{ret}}(x)$ есть запаздывающая функция Грина, а $D_{\text{adv}}(x)$ — опережающая.

Соответствующие функции для фермионного поля получаются действием на функцию $D(x)$ оператора $\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m\right)$. А именно, *перестановочная* функция для фермионного поля $S(x)$ равна

$$S(x) = - \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) D(x). \quad (I.15)$$

Выражение *причинной* функции для фермионного поля таково:

$$S_c(x) = - \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) D_c(x). \quad (I.16)$$

Наконец, *запаздывающая* функция $S_{\text{ret}}(x)$ и *опережающая* $S_{\text{adv}}(x)$ для этого же поля определяются формулами

$$S_{\text{ret}}(x) = - \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) D_{\text{ret}}(x), \quad (I.17)$$

$$S_{\text{adv}}(x) = - \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) D_{\text{adv}}(x) \quad (I.17')$$

и удовлетворяют неоднородным уравнениям

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) S_{\text{ret}}(x) = -\delta(x), \quad (I.18)$$

$$\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) S_{\text{adv}}(x) = -\delta(x). \quad (I.18')$$

Доказательство формул, приведенных в этом дополнении, можно найти в курсах квантовой теории поля [37, 38].

Дополнение II (к § 15)

Компоненты спинора $u'_\alpha(p)$ для $E > 0$ могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{array}{ll} r=1 & r=2 \\ u_1 = N, & u_1 = 0, \\ u_2 = 0, & u_2 = N, \\ u_3 = \frac{p_z}{m+E} N, & u_3 = \frac{\Pi^*}{m+E} N, \\ u_4 = \frac{\Pi}{m+E} N, & u_4 = -\frac{p_z}{m+E} N, \end{array} \right\} \quad (II.1)$$

где $N = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{m}{E} \right)^{1/2}$, $\Pi = p_z + ip_y$.

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial p_z} \frac{\partial u}{\partial p_z} = \sum_{\alpha=1}^4 \frac{\partial u^*_{\alpha}}{\partial p_z} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial p_z} = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{m}{E}\right)^{-1} \frac{m^2 p_z^2}{E^6} + \\ + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{m}{E}\right)^{-1} \frac{1}{E^2} \left[1 + \frac{p_z^4}{\left(1 + \frac{m}{E}\right)^2 E^4} + \frac{1}{4} \frac{m^2 p_z^4}{\left(1 + \frac{m}{E}\right)^2 E^6} - \right. \\ \left. - \frac{2p_z^2}{\left(1 + \frac{m}{E}\right) E^2} - \frac{mp_z^2}{\left(1 + \frac{m}{E}\right) E^3} + \frac{mp_z^4}{\left(1 + \frac{m}{E}\right)^2 E^5} \right] + \\ + \frac{1}{2} \frac{(E^2 - m^2 - p_z^2) p_z^2}{E^6} \left(1 + \frac{m}{E}\right)^3 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m}{E}\right)^2. \quad (\text{II.2}) \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\int p_z^2 d\Omega = \frac{4}{3} \pi p^2, \quad \int p_z^4 d\Omega = \frac{4}{5} \pi p^4, \quad (\text{II.3})$$

находим

$$M = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial u^*}{\partial p_z} \frac{\partial u}{\partial p_z} d\Omega = \begin{cases} \frac{1}{4m^2} & \text{при } p \ll mc, \\ \frac{1}{3} \frac{1}{p^2} & \text{при } p \gg mc \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

$$(\text{II.4}')$$

или

$$M\left(\xi, \frac{m}{p_0}\right) = \begin{cases} \frac{1}{4m^2} & \text{при } \xi \ll \frac{m}{p_0}, \\ \frac{1}{4m^2} \frac{4}{3} \frac{m^2}{p_0^2} \frac{1}{\xi^2} & \text{при } \xi \gg \frac{m}{p_0}. \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

$$(\text{II.5}')$$

Интеграл от $M(\xi)$ имеет вид

$$I_2\left(\frac{m}{p_0}\right) = \int_0^{\infty} f^2(\xi) \xi^2 d\xi M\left(\xi, \frac{m}{p_0}\right). \quad (\text{II.6})$$

Этот интеграл при $m/p_0 \rightarrow \infty$ равен

$$I_2\left(\frac{m}{p_0}\right) = \frac{1}{4m^2} \int_0^{\infty} f^2(\xi) \xi^2 d\xi = \frac{\alpha}{4m^2}. \quad (\text{II.7})$$

При $m/p_0 \rightarrow 0$ имеем

$$I_2\left(\frac{m}{p_0}\right) = \frac{1}{4m^2} \int_0^{m/p_0} f^2(\xi) \xi^2 d\xi + \frac{1}{4m^2} \frac{4}{3} \frac{m^2}{p_0^2} \int_{m/p_0}^{\infty} f^2(\xi) d\xi. \quad (\text{II.8})$$

Первый интеграл в (II.8) стремится к нулю, как $(m/p_0)^3$; второй интеграл в (II.8) стремится к единице и дает вклад в I_2 порядка $1/p_0^2$. Этот вклад объединяется с вкладом интеграла I_1 в (15.9).

Дополнение III (к § 16)

Пример, на который мы ссылаемся в § 16, таков.

Пусть поле $\varphi(\mathbf{x})$ (16.13) имеет амплитуду $A(\mathbf{k})$, равную

$$A(\mathbf{k}) = \frac{c_1}{\omega} \exp\left(-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)^2}{2b^2}\right) + \frac{c_2}{\omega} \exp\left(-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_2)^2}{2b^2}\right). \quad (\text{III.1})$$

Вычислим $\omega(\mathbf{x}, 0)$. На основании (16.16) имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, 0) &= c_1 \int \frac{\exp\left(-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1)^2}{2b^2} + i\mathbf{k}\mathbf{x}\right)}{\omega} d^3k + \\ &\quad + c_2 \int \frac{\exp\left(-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_2)^2}{2b^2} + i\mathbf{k}\mathbf{x}\right)}{\omega} d^3k = \\ &= \frac{c_1}{\omega_1} \exp\left(-\frac{b^2 x^2}{2} + i\mathbf{k}_1 \mathbf{x}\right) + \frac{c_2}{\omega_2} \exp\left(-\frac{b^2 x^2}{2} + i\mathbf{k}_2 \mathbf{x}\right), \quad (\text{III.2}) \end{aligned}$$

причем предположено, что $|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| \gg b$. Отсюда

$$\hat{\omega}\varphi = c_1 \exp\left(-\frac{b^2 x^2}{2} + i\mathbf{k}_1 \mathbf{x}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{b^2 x^2}{2} + i\mathbf{k}_2 \mathbf{x}\right). \quad (\text{III.3})$$

Пользуясь (16.24), имеем

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{x}, 0) &= \frac{1}{2} (\hat{\omega}\varphi^* \varphi + \varphi^* \hat{\omega}\varphi) = \\ &= e^{-b^2 x^2} \left\{ \frac{|c_1|^2}{\omega_1} + \frac{|c_1 c_2|}{\omega_1} \cos(\Delta \mathbf{k} \mathbf{x} + \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|c_1 c_2|}{\omega_2} \cos(\Delta \mathbf{k} \mathbf{x} + \alpha) + \frac{|c_2|^2}{\omega_2} \right\}, \quad (\text{III.4}) \end{aligned}$$

где $\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$, $\alpha = \arg(c_2/c_1)$. Полагая $\omega_2 \gg \omega_1$, получим

$$\omega(\mathbf{x}, 0) = e^{-b^2 x^2} \frac{|c_1|^2}{\omega_1} \left[1 + \left| \frac{c_2}{c_1} \right| \cos(\Delta \mathbf{k} \mathbf{x} + \alpha) \right]. \quad (\text{III.5})$$

При $|c_2/c_1| > 1$ величина $\omega(\mathbf{x}, 0)$ осциллирует. Заметим, что в силу предположения $|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1| \gg b$ плотность не

сильно локализована (b малò!). Осцилляции имеют период порядка $1/|k_2 - k_1|$ в пространстве и порядка $1/|\omega_2 - \omega_1|$ во времени.

Дополнение IV (к § 20)

Поглощающая диафрагма. Рассмотрим решения уравнения Дирака для частицы массы m и энергии E , движущейся в поле сильно поглощающей диафрагмы. Мы обязаны предположить определенную ковариантность взаимодействия частиц диафрагмы с рассматриваемой нами частицей. Предположим ради определенности, что взаимодействие имеет векторный характер. Пусть четвертая компонента этого взаимодействия есть V .

Тогда уравнение Дирака гласит:

$$(\alpha p + \beta m) \psi = (E - V) \psi. \quad (\text{IV.1})$$

Полагая $\psi = \begin{Bmatrix} \Phi \\ \chi \end{Bmatrix}$, получим для Φ

$$\left\{ (\sigma \hat{p} \frac{1}{(E - V + m)} (\sigma \hat{p})) \right\} \Phi = (E - V - m) \Phi, \quad (\text{IV.2})$$

где σ — матрицы Паули, а

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.3})$$

В области, где $V = 0$ (вне экрана и внутри щели), имеем

$$\hat{p}^2 \Phi = (E^2 - m^2) \Phi. \quad (\text{IV.4})$$

Ограничимся для простоты двумя измерениями и направим пучок по оси Oy . Замечая, что $\hat{p}^2 = -\nabla^2 = -(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$, находим Φ в виде

$$\Phi \sim \exp(i(k_x x + k_y y)), \quad (\text{IV.5})$$

$$E^2 = k_x^2 + k_y^2 + m^2 = k^2 + m^2, \quad (\text{IV.6})$$

$$E = +\sqrt{k^2 + m^2}. \quad (\text{IV.6'})$$

В области внутри толщи экрана, где $V \neq 0$, уравнение (II.2) записывается в форме

$$\hat{p}^2 \Phi + [(E - V)^2 - m^2] \Phi = 0 \quad (\text{IV.7})$$

или

$$\nabla^2 \Phi + [(E - V)^2 - m^2] \Phi = 0. \quad (\text{IV.7'})$$

Если бы энергия V была действительной, мы бы имели два случая:

а) $V < 0$ (притяжение); в этом случае величина $[(E-V)^2 - m^2] = q^2 = q_x^2 + q_y^2 > k^2$ и решение имеет вид волны

$$\varphi \sim \exp(i(q_x x + q_y y)). \quad (\text{IV.5}')$$

При $E < m$ могут появиться и связанные состояния. Если $V < -2m$, то возникают и такие связанные состояния, в которых электронные и позитронные состояния перепутываются.

б) $V > 0$ (отталкивание); в этом случае величина $[(E-V)^2 - m^2]$ при достаточно больших E положительна, так что решение опять можно представить в виде (IV.5'), но только с иным значением волнового вектора q'_x, q'_y . При $(E-V)^2 - m^2 > 0$ частица проходит над барьером. При $(E-V)^2 - m^2 = -\lambda^2 < 0$, $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = \lambda^2$ волна будет иметь вид

$$\varphi \approx \exp(\pm \lambda_x x \pm \lambda_y y), \quad (\text{IV.5}'')$$

причем внутри бесконечного барьера мы должны взять одно из этих решений, соответствующее затуханию волны φ .

Наконец, при больших значениях V ($V > 2m$) барьер становится опять прозрачным; это соответствует перекрытию [внутри барьера уровней m и $-m$, т. е. случаю большой поляризации вакуума, когда поле способно порождать пары позитронов и электронов.

Обратимся к интересующему нас случаю поглощающего чисто мнимого потенциала. Полагая $V = iW$, получим

$$\nabla^2 \varphi + [(E^2 - m^2) - 2iEW - W^2] \varphi = 0. \quad (\text{IV.8})$$

Из этого уравнения видно, что при $W \rightarrow \infty$ оно превращается в уравнение вида

$$\nabla^2 \varphi - W^2 \varphi = 0 \quad (\text{IV.8}')$$

и, следовательно, имеет экспоненциальные решения с действительными показателями λ_x, λ_y , $\lambda_x^2 + \lambda_y^2 = W^2 > 0$:

$$\varphi \sim \exp(\pm \lambda_x x \pm \lambda_y y), \quad (\text{IV.9})$$

и при больших W (больших λ_x, λ_y) эти волны будут крайне быстро затухать внутрь экрана. Существенно, что в этом случае не возникает «парадокс Клейна» и решения с $\pm m$ не перепутываются между собой.

Дополнение V (к § 22)

А. Формально пространственно-временная структура нуклона определяется вершиной Γ_μ (см. (22.3)), зависящей от двух переменных $X = y - (x_1 + x_2)/2$ и $x = x_2 - x_1$:

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu(X, x). \quad (V.1)$$

Происхождение функции двух аргументов $\Gamma_\mu(X, x)$ может быть пояснено с помощью теории возмущений. Вычислим вершину Γ_μ для взаимодействия, описываемого лагранжианом

$$\hat{W} = g \{ \hat{\psi} \gamma_5 \tau_1 \bar{\psi} \hat{\phi}_1 + \hat{\psi} \gamma_5 \tau_2 \bar{\psi} \hat{\phi}_2 \} + \\ + ie \left\{ \hat{\phi}_1 \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial x_\mu} - \hat{\phi}_2 \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial x_\mu} \right\} \hat{A}_\mu + \frac{e}{2} \hat{\psi} (1 + \tau_3) \gamma_\mu \bar{\psi} \hat{A}_\mu. \quad (V.2)$$

Здесь операторы $\hat{\psi}$ и $\bar{\psi}$ описывают нуклонное поле («голые» протоны и нейтроны), операторы $\hat{\phi}_1$ и $\hat{\phi}_2$ — заряженное мезонное псевдоскалярное поле, τ_1, τ_3 и τ_2 — обычные матрицы изотопического спина. Первый член описывает «сильное» взаимодействие нуклонного и мезонного полей, g есть константа этого взаимодействия; ее мы будем считать формально также достаточно малой, чтобы можно было применять теорию возмущений. Второй член описывает взаимодействия мезонного поля с электромагнитным полем; это поле характеризуется вектор-потенциалом \hat{A}_μ . Наконец, третий член описывает электромагнитное взаимодействие «голого» нуклона. Для нейтрона этот член равен нулю, так как в этом случае $\frac{1}{2}(1 + \tau_3) = 0$.

Вычислим теперь элемент матрицы рассеяния фотона на нуклоне в первом порядке по e и во втором порядке по константе g . Таким образом, нам надо вычислить среднее по мезонному вакууму от энергии взаимодействия \hat{W} , учитывая члены порядка e , eg , eg^2 . Следуя обыч-

ному методу диаграмм Фейнмана, мы получим для среднего по мезонному вакууму

$$\langle 0 | \hat{W} | 0 \rangle = \int J_\mu(x) A_\mu(x) d^4x + \\ + \int J_\mu(x_1, x_2, y) A_\mu(x) d^4x_1 d^4x_2 d^4y, \quad (V.3)$$

где

$$J_\mu(x) = \frac{e}{2} \bar{\psi}(x) (1 + \tau_3) \gamma_\mu \psi(x), \quad (V.4)$$

$$J_\mu(x_1, x_2, y) = i e g^2 \bar{\psi}(x_2) \left\{ \gamma_5 S_c(x_2 - x_1) \gamma_5 \tau_3 \times \right. \\ \left. \times \left[D_c(x_2 - y) \frac{\partial D_c(x_1 - y)}{\partial y_\mu} - D_c(x_1 - y) \frac{\partial D_c(x_2 - y)}{\partial y_\mu} \right] \right\} \psi(x_1). \quad (V.5)$$

Ток (V.4) обусловлен зарядом «голого» протона, а ток (V.5) — зарядом мезонной атмосферы, сосредоточенной около нуклона. Этот последний ток соответствует диаграмме Фейнмана, приведенной на рис. 22, б. В этой формуле $S_c(x_2 - x_1)$ есть причинная функция для нуклона (см. ее определение в (14.3) и (I.16)); $D_c(x_2 - y)$, $D_c(x_1 - y)$ — причинные функции для мезона. Выражение стоящее в фигурных скобках формулы (V.5), является, с точностью до множителя $i e g^2$, вершинной функцией, $\Gamma_\mu(x_1, x_2, y)$ второго порядка по g . Как видно, она зависит лишь от разностей координат x_1, x_2, y и поэтому может быть представлена в виде функции переменных $X - y$ и x , причем $X = y - (x_1 + x_2)/2$. Таким образом, с полевой точки зрения пространственно-временная структура нуклона описывается функцией двух переменных. Различие точек входа x_1 и выхода x_2 учитывает эффект отдачи нуклона (изменение его положения) при переходе из начального состояния $\psi(x_1) = \psi_i(x_1)$ в конечное $\psi(x_2) = \psi_f(x_2)$. В этом отражается динамический характер структуры нуклона, описываемый вершиной $\Gamma_\mu(X, x)$. Фурье-образ этой величины $\tilde{\Gamma}(\alpha, \beta)$ есть функция матриц γ_μ и векторов α, β . Для дальнейшего будет достаточно ограничиться членами $\tilde{\Gamma}$, диагональными относительно спиновых индексов. Нетрудно показать, что эти члены имеют структуру

$$\tilde{\Gamma}_\mu(\alpha, \beta) = \alpha_\mu \Phi(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2) \equiv \Phi_\mu(\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2), \quad (V.6)$$

где Φ — функция, зависящая от инвариантов α^2 , $\alpha\beta$, β^2 . Заметим, что точно такой вид имела бы величина $\tilde{\Gamma}_\mu(\alpha, \beta)$, если бы нуклон был бесспиновой, скалярной частицей.

Из рассеяния частиц, как следует из формулы (22.7), можно найти значение функции $\tilde{\Gamma}_\mu(\alpha, \beta)$ только при $\alpha=q$ и $\beta=P$:

$$\tilde{\Gamma}_\mu(q, P) = \Phi_\mu(q^2, 0, P^2) = \Phi_\mu(q^2, 0, 4M^2 - q^2). \quad (V.7)$$

Определяемый отсюда пространственный образ

$$\rho_\mu(X) = \int \tilde{\Gamma}_\mu(q, P) e^{iqX} d^3q \quad (V.8)$$

имеет физический смысл лишь при $q^2 \ll 4M^2$ ($P^2 \approx 4M^2$). Действительно, переменная $\beta (=P)$ сопряжена координате $x = x_2 - x_1$, но не координате $X = y - \frac{x_1 + x_2}{2}$, между тем согласно (V.7) переменная β в (V.8) оказывается функцией переменной $\alpha = q$. Поэтому мы должны положить

$$\rho_\mu(X) = \int \tilde{\Gamma}_\mu(q, 2M) e^{iqX} d^3q \quad (V.9)$$

и ограничиться значениями $q^2 \ll 4M^2$.

Отсюда следует, что пространственное распределение $\rho(X)$ имеет физический смысл лишь для тяжелого, почти покоящегося нуклона и для малых переданных импульсов q .

Б. Для упрощения формулы (22.10):

$$J_\mu = \bar{u}_f(p_f) \{a q_\mu + b P_\mu + c \gamma_\mu + d \sigma_{\mu\nu} q_\nu + e \sigma_{\mu\nu} P_\nu\} u_i(p_i), \quad (V.10)$$

заметим, что из векторов q , P и γ_μ можно построить только следующие скаляры: q^2 , P^2 , $\gamma_\mu q_\mu$, $\gamma_\mu P_\mu$ (скаляр $qP \equiv 0$); далее, скаляр P^2 выражается через скаляр q^2 ($P^2 = 4M^2 - q^2$), скаляры $\gamma_\mu q_\mu$ и $\gamma_\mu P_\mu$ могут быть исключены с помощью уравнений Дирака

$$(\gamma_\mu p_\mu - M) u(p) = 0, \quad (V.11)$$

$$\bar{u}(p) (\gamma_\mu p_\mu + M) = 0, \quad (V.11')$$

где M — масса нуклона. В силу этих соотношений коэффициенты a , b , c , d , e являются функциями только q^2 ,

На основании уравнений (V.11) и (V.11') имеем также

$$(\bar{u}_f | i\sigma_{\mu\nu} P_\nu | u_i) = (\bar{u}_f | -q_\mu | u_i), \quad (\text{V.12})$$

$$(\bar{u}_f | i\sigma_{\mu\nu} q_\nu | u_i) = (\bar{u}_f | 2M\gamma_\mu - P_\mu | u_i). \quad (\text{V.12}')$$

Эти соотношения позволяют исключить из (V.10) члены, пропорциональные p_μ и $\sigma_{\mu\nu} P_\nu$. После исключения этих членов ток J_μ приобретает вид

$$J_\mu = \bar{u}_f(p_f) \{Aq_\mu + B\gamma_\mu + C\sigma_{\mu\nu} q_\nu\} u_i(p_i), \quad (\text{V.13})$$

где A , B , C суть форм-факторы функции, зависящие только от q^2 .

Пользуясь теперь соотношением (22.4''), получаем

$$0 = J_\mu q_\mu = \bar{u}_f(p_f) \{Aq^2 + B\gamma_\mu q_\mu + C\sigma_{\mu\nu} q_\mu q_\nu\} u_i(p_i). \quad (\text{V.14})$$

Множитель $\gamma_\mu q_\mu$ равен нулю в силу уравнений (V.11) и (V.11'), а сумма $\sigma_{\mu\nu} q_\mu q_\nu = 0$ в силу антисимметрии матриц $\sigma_{\mu\nu}$. Отсюда следует, что форм-фактор $A(q^2) = 0$.

Окончательно ток приобретает вид

$$J_\mu = \bar{u}_f(p_f) \{B(q^2)\gamma_\mu + C(q^2)\sigma_{\mu\nu} q_\nu\} u_i(p_i). \quad (\text{V.15})$$

Дополнение VI (к § 23)

Уравнение (23.6) для упругого πN -рассеяния было получено таким путем. Пусть $\Phi_s = \Phi_s(k_1, k_2, k_3, \dots, k_s)$ — волновая функция системы из s мезонов и нуклонов (здесь k_1, k_2, \dots, k_s — их импульсы). При взаимодействии мезоны и нуклоны могут рождаться и уничтожаться. Поэтому волновые функции Φ_s с различным числом частиц связаны между собой цепочкой уравнений

$$(E - H_0) \Phi_s = \sum_{s' \neq s} W_{ss'} \Phi_{s'}. \quad (\text{VI.1})$$

Здесь H_0 — гамильтониан невзаимодействующих частиц, E — полная энергия системы, $W_{ss'}$ — матричный элемент оператора энергии взаимодействия. Из всех функций Φ_s нас интересует одна $\Phi_2(k_1, k_2) = \psi(k, p)$, где $k_1 = k$ есть импульс мезона, а $k_2 = p$ есть импульс нуклона. Для

выделения этой компоненты перепишем систему уравнений (VI.1) в виде

$$(E - H_0) \psi = \sum_{s' \neq 2} W_{2s'} \Phi_{s'}, \quad (\text{VI.2})$$

$$(E - H_0) \Phi_{s'} = \sum_{s'' \neq s'} W_{s's''} \Psi_{s''} + W_{s'2} \psi. \quad (\text{VI.2}')$$

Введем «элементарную матрицу» рассеяния \hat{r} (см. [41]):

$$\hat{r} = \delta^+ (E - H_0) \hat{W}, \quad (\text{VI.3})$$

где $\delta^+(z)$ — функция, определенная в дополнении I формулой (I.7).

С помощью этой матрицы уравнения (VI.2) и (VI.2') могут быть записаны в символическом виде:

$$(E - H_0) \psi = \hat{w} \Phi, \quad (\text{VI.4})$$

$$\Phi = \hat{r} \Phi + \hat{r} \psi; \quad (\text{VI.4}')$$

отсюда итерацией получим уравнение для интересующей нас функции ψ :

$$(E - H_0) \psi = \hat{w} \frac{\hat{r}}{1 - \hat{r}} \psi + (w \hat{r}^N \Phi)_{N \rightarrow \infty}. \quad (\text{VI.5})$$

Если предположить, что: а) все расходящиеся члены исключены из этого уравнения и б) остаточный член при $N \rightarrow \infty$ стремится к нулю, то это уравнение может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \{E - E(k, p)\} \psi(k, p) = \\ = \int \mathfrak{G}(k, p | k', p') \psi(k', p') d^3 k' d^3 p', \end{aligned} \quad (\text{VI.6})$$

где $\mathfrak{G}(k, p | k', p')$ есть матричный элемент оператора

$$\mathfrak{G} = \frac{\hat{r}}{1 - \hat{r}} \hat{w}, \quad (\text{VI.7})$$

$$E(k, p) = E_\pi(k) + E_N(p) \quad (\text{VI.8})$$

есть сумма энергий π -мезона $E_\pi(k)$ и нуклона $E_N(p)$. Для реальных процессов $E = H_0$ и матрица r из-за мнимости функции

$$\delta^+(E - H_0) = \frac{1}{E - H_0} + i\pi \delta(E - H_0) \quad (\text{VI.9})$$

будет давать вклад в мнимую часть оператора $\hat{\mathcal{G}}$. Таким образом, этот оператор $\hat{\mathcal{G}}$ является комплексным и эта комплексность обусловлена реальными неупругими процессами.

Перейдем теперь к системе центра масс, в которой $k + p = 0$. Уравнение (VI.6) тогда запишется в виде

$$\{E - E_N(\mathbf{q}) - E_\pi(\mathbf{q})\} \psi(\mathbf{q}) = \int \hat{\mathcal{G}}(E, \mathbf{q} | \mathbf{q}') \psi(\mathbf{q}') d^3 \mathbf{q}' \quad (\text{VI.10})$$

или, в координатном представлении,

$$\{E - \hat{H}_N^0(\mathbf{x}) - \hat{H}_\pi^0(\mathbf{x})\} \psi(\mathbf{x}) = \int F(E, \mathbf{x} | \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (\text{VI.11})$$

Здесь $\hat{H}_N^0(\mathbf{x})$ и $\hat{H}_\pi^0(\mathbf{x})$ суть гамильтонианы свободного движения нуклона и π -мезона соответственно. Применяя к обеим частям этого уравнения один раз оператор $[E - \hat{H}_N^0(\mathbf{x})] + \hat{H}_\pi^0(\mathbf{x})$, а другой раз оператор $[E + \hat{H}_\pi^0(\mathbf{x})] - \hat{H}_N^0(\mathbf{x})$, получим уравнения

$$[E_\pi^2 - \hat{K}^2] \psi(\mathbf{x}) = \int U(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; E) \psi(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}', \quad (\text{VI.12})$$

$$[E_N - \hat{H}_N^0(\mathbf{x})] \psi(\mathbf{x}) = \int V(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; E) \psi(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (\text{VI.13})$$

Эти уравнения приведены в тексте под номерами (23.6) и (23.7).

Эти уравнения можно получить также из цепочки уравнений для релятивистских многовременных волновых функций для системы частиц $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_N)$ (здесь $x_k = t_k$, \mathbf{x}_k есть время и координата k -частицы, см. [47]). Наиболее последовательно этот путь получения уравнения для одновременной функции $\varphi(t, \mathbf{x}_1, t, \mathbf{x}_2) = \psi(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ осуществлен в работе [48] на основе теории функций Грина. Авторы получили уравнение, которое они называют *квазипотенциальным*. Преимущество этого нового вывода одновременного уравнения заключается в том, что следуя ему: а) автоматически выполнены необходимые перенормировки, б) потенциал оказывается локальным и приближенно может быть выражен через амплитуду рассеяния.

Дополнение VII (к §§ 24 и 29)

Взаимодействие полей в современной теории описывается оператором функции Лагранжа $\hat{L}(x)$, которая обычно представляет собою произведение операторов рассматриваемых полей. Это произведение должно удовлетворять требованиям релятивистской инвариантности, некоторым условиям симметрии и требованию соответствия с классической теорией, если таковая существует. В частности, для взаимодействия электромагнитного поля \hat{A}_μ с электронно-позитронным полем ψ лагранжиан \hat{L} имеет вид

$$\hat{L} = -\frac{1}{\hbar} \hat{J}_\mu(x) \hat{A}_\mu(x), \quad (\text{VII.1})$$

где ток $\hat{J}_\mu(x)$ равен

$$\hat{J}_\mu(x) = e\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x). \quad (\text{VII.2})$$

Константой связи в данном случае является элементарный электрический заряд e . В случае скалярного электрически нейтрального поля $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^+$ лагранжиан отображает взаимодействие этого поля с самим собой. Простейшей формой такого лагранжиана является

$$\hat{L} = -\frac{\lambda}{\hbar} \frac{\hat{\varphi}^4}{4}, \quad (\text{VII.3})$$

где λ — некоторая константа связи *).

При достаточно малой константе взаимодействия и при полностью включенном взаимодействии матрица рассеяния \hat{S}

$$\hat{S} = T \exp i \int \hat{L}(x) d^4x \quad (\text{VII.4})$$

может быть представлена в виде функционального ряда (см. (28.11), (29.22))

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int T [\hat{L}(x_1) \hat{L}(x_2) \dots \hat{L}(x_n)] d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n. \quad (\text{VII.5})$$

*) Заметим, что $\hat{L} \sim \hat{\varphi}^3$ ведет к динамически неустойчивым системам; $\hat{L} \sim \hat{\varphi}^2$ ведет к тривиальным линейным уравнениям.

Ввиду того, что лагранжиан $\hat{L}(x)$ является произведением операторов поля $\hat{\phi}$, или $\hat{\psi}$, или \hat{A} , каждый член ряда (VII.5) представляет собою сумму произведений операторов рождения частиц a_k^+ и операторов их уничтожения a_k . Последовательность этих операторов, переводящая начальное состояние поля Ψ_i в конечное Ψ_f , описывает историю частиц (в смысле графиков Фейнмана), в результате которой состояние Ψ_i превращается в состояние Ψ_f . Вычисление матричного элемента $S_{fi} = \langle \Psi_f | \hat{S} | \Psi_i \rangle$, описывающего этот переход, может быть существенно упрощено, если расположить множители в (VII.2) таким образом, чтобы все операторы уничтожения стояли справа от операторов рождения.

Тогда часть операторов уничтожения, действуя на Ψ_i , переводит его в функционал вакуума Ψ_0 , часть операторов рождения, действуя слева на функционал $\bar{\Psi}_f$, также переводит его в функционал вакуума $\bar{\Psi}_0$. Вычисление действия остальных «лишних» операторов сведется к нахождению их среднего по вакууму.

Такое изменение расположения операторов называется операцией представления T -произведений через нормальные N -произведения. Она выполняется на основе легко проверяемого соотношения (см. [37, 38]).

$$T \{ \phi(x) \phi(y) \} = N \{ \phi(x) \phi(y) \} + D_c(x-y), \quad (\text{VII.5}')$$

справедливого для операторов бозонного поля $\phi(x)$, и соотношения

$$T \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \} = N \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \} + [S_c(x-y)]_{\alpha\beta}, \quad (\text{VII.6})$$

справедливого для операторов фермионного поля $\bar{\psi}\psi$. Заметим, что для комбинаций операторов вида $(\psi, \bar{\psi})$ или $(\bar{\psi}, \psi)$ I - и N -произведения равны между собою. Причинные функции $D_c(x)$ и $S_c(x)$ определены в дополнении I и называются также *свертками*. Средние по вакууму от нормального произведения, очевидно, равны нулю. Поэтому не исчезающий вклад в матричные элементы S_{if} создается из произведений сингулярных функций типа $D_c(x-y)$ и $S_c(x-y)$ и из крайних, «обрамляющих» операторов уничтожения и рождения частиц, действующих на функ-

ционалы Ψ_f и Ψ_i^*). В соответствии со сказанным в простейшем случае действительного скалярного поля $\hat{\phi}(x)$

$$\hat{\phi}(x) = \int d^3k \{ \hat{a}(k) U_k(x) + \hat{a}^+(k) U_k^*(x) \}, \quad (\text{VII.7})$$

где $U_k(x) = e^{ikx}/\sqrt{2\omega}$, $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$, матричный элемент S_{fi} имеет вид

$$S_{fi} = \langle \Psi_f | a^+(k_1) a^+(k_2) \dots a^+(k_m) \int \bar{\Phi}_f(y_1, y_2, \dots, y_m) \times \\ \times \hat{S}_{mn} \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) d^4y_1 d^4y_2 \dots d^4y_m \times \\ \times d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n a(k'_1) a(k'_2) \dots a(k'_m) | \Psi_i \rangle, \quad (\text{VII.8})$$

где через \hat{S}_{mn} обозначены суммы произведений всех операторов $\hat{a}^+(k) U_k^+(x)$ и $\hat{a}(k) U_k(x)$, за исключением «обрамляющих» операторов, которые явно выписаны в (VII.8). Функция $\bar{\Phi}_f$ равна

$$\bar{\Phi}_f(y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_P U_{k_1}^*(y_1) U_{k_2}^*(y_2) \dots U_{k_m}^*(y_m), \quad (\text{VII.9})$$

где \sum_P означает сумму по всем перестановкам m -частиц, имеющихся в конечном состоянии; подобным же образом $\Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_P U_{k'_1}(x_1) U_{k'_2}(x_2) \dots U_{k'_n}(x_n)$ (VII.9')

есть симметризованная функция n -частиц в начальном состоянии. Из самого определения «обрамляющих» операторов следует, что

$$S_{fi} = \int \bar{\Phi}_f(y_1, y_2, \dots, y_m) s(y_1, y_2, \dots, y_m | x_1, x_2, \dots, x_n) \times \\ \times \Phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) d^4y_1 d^4y_2 \dots d^4y_m d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n, \quad (\text{VII.10})$$

где

$$s(y_1, y_2, \dots, y_m | x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \Psi_0 | \hat{S}_{nm} | \Psi_0 \rangle \quad (\text{VII.11})$$

— средние по вакууму от всех комбинаций операторов рождения и уничтожения частиц, описывающих проме-

*) Некоторые матричные элементы могут расходиться. Мы здесь не будем описывать способы регуляризации («перенормировки») таких элементов. Эти методы изложены в специальных курсах квантовой теории поля.

Поле пакета виртуальных фотонов, возникающих при этом переходе, описывается уравнением

$$A_{\mu}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(\square^2 + m^2)} J_{\mu}(x) = \int d^3 p_3 d^3 p_1 \frac{\bar{u}_f F_{\mu} u_i}{(k^2 - k_0^2 + m^2)} \times \\ \times \exp \left[-\frac{a^2}{2} [(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_f)^2 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_i)^2] - i(\mathbf{k}\mathbf{x} - k_0 t) \right]. \quad (\text{VIII.2})$$

Для вычисления интегралов в (VIII.2) положим

$$\mathbf{p}_1 = \xi + \mathbf{p}_i, \quad \mathbf{p}_3 = \eta + \mathbf{p}_f, \quad (\text{VIII.3})$$

так что

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1 &= (\eta - \xi) + (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i), \quad \mathbf{k} \approx (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i), \\ p_{03} - p_{01} &= E(\mathbf{p}_3) - E(\mathbf{p}_1) = E_f - E_i + \nabla E_f \eta - \nabla E_i \xi + \dots, \\ k_0 &\approx E_f - E_i, \quad \nabla E_f = \mathbf{u}_f, \quad \nabla E_i = \mathbf{u}_i. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII.3}')$$

Будем считать, что пакет мал, но $|\mathbf{q}_{fi}| = |\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i| \gg \hbar/a$. Далее, для простоты примем, что излучающая частица является точечной (т. е. будем считать, что ее масса $m \gg |q_{fi}|$). Тогда для потенциала пакета получаем из (VIII.2)

$$A_{\mu}(\mathbf{x}, t) \approx \exp \left[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - k_0 t) - \frac{1}{2a^2} ((\mathbf{x} - \mathbf{u}_f t)^2 + (\mathbf{x} - \mathbf{u}_i t)^2) \right] \quad (\text{VIII.4})$$

— выражение, которое и было принято в основном тексте (при этом было положено $\mathbf{u}_i = 0$, $\mathbf{u}_f = \mathbf{u}$).

Б. Заметим, что интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int e^{-\Phi(\mathbf{x}, t)} d\mathbf{x} dt, \quad (\text{VIII.5})$$

где

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = A^2 x^2 + Bxt + C^2 t^2 + Dx + Et + G, \quad (\text{VIII.6})$$

при $\Delta^2 = 4A^2 C^2 - B^2 > 0$ равен

$$I = \frac{2\pi}{\Delta} e^{\Psi}, \quad (\text{VIII.7})$$

где

$$\Psi = \frac{A^2}{\Delta^2} E^2 + \frac{C^2}{\Delta^2} D^2 - \frac{B}{\Delta^2} ED - G. \quad (\text{VIII.8})$$

В нашем случае

$$\Delta^2 = 2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \left[\frac{\mathbf{v}_f^2 + \mathbf{v}_i^2}{b^2} + \frac{u^2}{a^2} \right] - \left[\frac{\mathbf{v}_f + \mathbf{v}_i}{b^2} + \frac{u}{a^2} \right]^2, \quad (\text{VIII.9})$$

где

$$A^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \quad (\text{VIII.10})$$

$$C^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{v}_f^2 + \mathbf{v}_i^2}{b^2} + \frac{u^2}{a^2} \right), \quad (\text{VIII.10}')$$

$$B = - \left(\frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{b^2} + \frac{u}{a^2} \right), \quad (\text{VIII.10}'')$$

$$D = i(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \frac{1}{a^2} (2X - uT), \quad (\text{VIII.10}''')$$

$$E = -i(k_0 - q_0) + \frac{1}{a^2} [(X - uT, u)]. \quad (\text{VIII.10}^{IV})$$

(Здесь q_0 — разность четвертых компонент векторов p_3 и p_1 .) При специальных значениях Δ , A , C , B :

$$\Delta^2 = \frac{1}{a^4} [2(\mathbf{v}_f^2 + \mathbf{v}_i^2 + u^2) + (\mathbf{v}_f + \mathbf{v}_i - u)^2], \quad (\text{VIII.11})$$

$$A^2 = \frac{2}{a^2}, \quad (\text{VIII.11}')$$

$$C^2 = -\frac{1}{a^2} (\mathbf{v}_f^2 + \mathbf{v}_i^2 + u^2), \quad (\text{VIII.11}'')$$

$$B = -\frac{1}{a^2} (\mathbf{v}_f + \mathbf{v}_i + u), \quad (\text{VIII.11}''')$$

получаем

$$\begin{aligned} \Psi = & -\frac{X^2}{2a^2} - \frac{(X - uT)^2}{2a^2} + \frac{C^2}{a^4 \Delta^2} (2X - uT)^2 + \\ & + \frac{A^2}{a^4 \Delta^2} (X - uT, u)^2 + \frac{B}{a^4 \Delta^2} (2X - uT) (X - uT, u) - \\ & - \frac{C^2}{\Delta^2} (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 - \frac{A^2}{\Delta^2} (k_0 - q_0) + \text{Im } \Psi, \quad (\text{VIII.12}) \end{aligned}$$

где $\text{Im } \Psi$ означает мнимую часть Ψ . Так как при $\mathbf{k} = \mathbf{q}$, $k_0 = q_0$, $\text{Im } \Psi = 0$, то в (VIII.12) $\text{Im } \Psi$ вообще можно опустить.

Действительная часть от Ψ есть положительно-определенная квадратичная форма переменных X и T . Приведем ее частные значения при $a=b$, $X_{\perp}=0$, $X_u \neq 0$, $T=0$ (здесь $X_u = \frac{1}{u}(Xu)$):

$$\Psi = -\frac{X_u^2}{d^2}, \quad d^2 = 2a^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(v_f + v_i - u)^2}{(v_f^2 + v_i^2 + u^2)} \right], \quad (\text{VIII.13})$$

для $X_u=0$, $T=0$

$$\Psi = -\frac{X_{\perp}^2}{d^2}, \quad (\text{VIII.13}')$$

для $X=0$, $T \neq 0$

$$\Psi = -\frac{u^2 T^2}{\beta^2}, \quad (\text{VIII.13}'')$$

где

$$\beta^2 = 2a^2 \frac{2(v_f^2 + v_i^2 + u^2) + (v_f + v_i + u)^2}{2(v_f^2 + v_i^2 + u^2) + u^2}. \quad (\text{VIII.14})$$

Дополнение IX (к § 28)

Пусть Ψ есть функционал от некоторой функции, определенной в пространстве $\mathfrak{N}(x)$:

$$\Psi = \Psi \{u(x)\}. \quad (\text{IX.1})$$

Варьируем функцию $u(x)$ около точки x :

$$u'(x) = u(x) + \delta u(x),$$

где вариация $\delta u(x)$ отлична от нуля в окрестности точки x_0 .

Если новый функционал можно представить в виде

$$\Psi' \equiv \Psi \{u'(x)\} = \Psi \{u(x)\} + \int F \{u(x')\} \delta u(x') dx', \quad (\text{IX.2})$$

то предел

$$\frac{\delta \Psi}{\delta u(x)} = \lim_{\delta u \rightarrow 0} \frac{\Psi \{u'(x)\} - \Psi \{u(x)\}}{\delta u(x) dx} = F \{u(x)\} \quad (\text{IX.3})$$

называют функциональной производной функционала Ψ по функции $u(x)$ в точке x . Другое, более формальное

определение таково:

$$\frac{\delta\Psi}{\delta u(x)} = \lim_{\varepsilon} \frac{\Psi\{u'(x)\} - \Psi\{u(x)\}}{\varepsilon}, \quad (\text{IX.3}')$$

где $\delta u(x') = \varepsilon \delta(x - x')$. В этом определении явно подчеркнута локализация вариации около точки x . Очевидно, что определения (IX.3) и (IX.3') эквивалентны.

Если $u(x) = \sigma(x)$ есть пространственноподобная поверхность, то

$$\frac{\delta\Psi}{\delta\sigma(x)} = \lim_{\delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Psi\{\sigma'(x)\} - \Psi\{\sigma(x)\}}{\delta\omega}, \quad (\text{IX.4})$$

где $\delta\omega = \delta\sigma(x) d^3x$ есть четырехмерный объем, заключенный между поверхностями $\sigma'(x)$ и $\sigma(x)$ (ср. рис. 30).

Если функционал $\Psi\{u(x)\}$ задан рядом

$$\begin{aligned} \Psi\{u\} = & \Psi_0(x) + \\ & + \frac{1}{1!} \int \psi(x_1) u(x_1) dx_1 + \frac{1}{2!} \int \psi(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2 + \\ & + \frac{1}{3!} \int \psi(x_1, x_2, x_3) u(x_1) u(x_2) u(x_3) dx_1 dx_2 dx_3, \end{aligned} \quad (\text{IX.5})$$

то его функциональная производная в точке x будет

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Psi\{u\}}{\delta u(x)} = & \psi(x) + \frac{1}{2!} \int \psi(x, x_2) u(x_2) dx_2 + \\ & + \frac{1}{2!} \int \psi(x_1, x) u(x_1) dx_1 + \\ & + \frac{1}{3!} \int \psi(x, x_2, x_3) u(x_2) u(x_3) dx_2 dx_3 + \\ & + \frac{1}{3!} \int \psi(x_1, x, x_3) u(x_1) u(x_3) dx_1 dx_3 + \\ & + \frac{1}{3!} \int \psi(x_1, x_2, x) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{IX.6})$$

Дополнение X (к § 31)

Релятивистская волновая функция для двух частиц. Рассмотрим волновую функцию для двух свободных частиц, описываемых плоскими волнами

$$\psi(x_1, t_1; x_2, t_2) = \exp[i(p_1 x_1 - E_1 t_1)] \exp[i(p_2 x_2 - E_2 t_2)]. \quad (\text{X.1})$$

Эта функция имеет физический смысл только в том случае, когда точки x_1, t_1 и x_2, t_2 лежат на пространственно-подобной поверхности.

Введем новые координаты:

$$\left. \begin{aligned} X &= \alpha x_1 + \beta x_2, & T &= \alpha t_1 + \beta t_2, \\ x &= x_1 - x_2, & t &= t_1 - t_2, \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.2})$$

где $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$.

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= X + \beta x, & t_1 &= T + \beta t, \\ x_2 &= X - \alpha x, & t_2 &= T - \alpha t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{X.3})$$

Полный импульс будет

$$P = p_1 + p_2, \quad E = E_1 + E_2. \quad (\text{X.4})$$

В этих переменных волновая функция (X.1) имеет вид

$$\psi(X, T, x, t) = \exp[i(PX - ET) + i(px - \varepsilon t)], \quad (\text{X.5})$$

где

$$p = \beta p_1 - \alpha p_2, \quad \varepsilon = \beta E_1 - \alpha E_2 \quad (\text{X.6})$$

суть относительные импульс и энергия.

Поскольку точки (x_1, t_1) и (x_2, t_2) лежат на пространственной поверхности, то можно положить $t_1 = t_2$; тогда $t = 0$, а T есть общее для обеих частиц время.

В системе центра масс $P = 0$, так что в этой системе при $t_1 = t_2$ имеем

$$\psi(X, T, x, 0) = \exp[i(px - ET)]. \quad (\text{X.7})$$

Здесь величина

$$E = E(p) = \sqrt{m_1^2 + p^2} + \sqrt{m_2^2 + p^2} \quad (\text{X.8})$$

есть полная энергия двух частиц в системе центра масс. В дальнейшем мы изменим обозначение, заменяя T на t ; при этом x есть относительная координата частиц, а t — их общее время. В этих обозначениях разложение функции ψ по сферическим волнам имеет вид

$$\psi(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \vartheta) R_l(pr) e^{-iE(p)t} \quad (\text{X.9})$$

и для бесспиновых частиц не отличаются от нерелятивистского. В этой формуле r есть расстояние между частицами в системе центра масс,

$$R_l(pr) = \frac{J_{l+1/2}(pr)}{\sqrt{pr}}, \quad (\text{X.10})$$

$J_{l+1/2}(z)$ — функция Бесселя, $P_l(\xi)$ — полином Лежандра. Асимптотический вид функции (X.9) будет

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \vartheta) [a_l(E) \exp(i(\mathbf{pr} - Et)) + b_l(E) \exp(-i(\mathbf{pr} - Et))], \quad (\text{X.11})$$

где $a_l(E) = e^{i\frac{l\pi}{2}}$, $b_l(E) = a_l^*(E)$.

Дополнение XI (к § 34)

Резонансные состояния. Нерелятивистская теория. Рассмотрим рассеяние двух частиц, способных к резонансному взаимодействию.

Для определенности предположим, что резонанс имеет место в s -состоянии *).

Представим волновую функцию s -состояния в виде

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} \psi(kr) \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right). \quad (\text{XI.1})$$

Функция ψ подчиняется уравнению

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + [k^2 - k^2(r)]\psi = 0, \quad (\text{XI.2})$$

где

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad k^2(r) = \frac{2mV(r)}{\hbar^2}; \quad (\text{XI.3})$$

E есть полная энергия, k — волновой вектор, m — приведенная масса взаимодействующих частиц: $1/m = 1/m_1 + 1/m_2$, $V(r)$ — потенциальная энергия их взаимодействия в s -состоянии,

*) Вычисления для других состояний аналогичны,

Специализируем вид $V(r)$ следующим образом (R — радиус сферы действия):

$$k^2(r) = 0 \quad \text{для } R < r, \quad (\text{XI.4})$$

$$k^2(r) = k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \quad \text{для } a < r < R, \quad (\text{XI.4}')$$

$$k^2(r) = 0 \quad \text{для } 0 < r < a \quad (\text{XI.4}'')$$

(см. рис. 51). Выбранный вид $V(r)$ допускает существование резонансных уровней в непрерывном спектре.

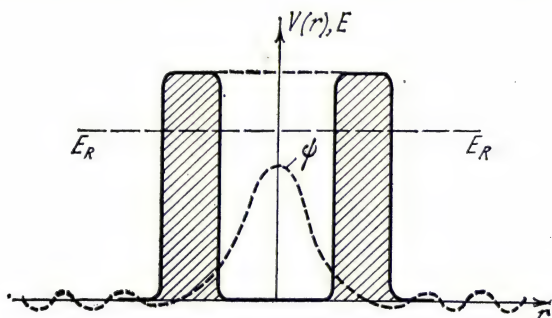


Рис. 51. Вид потенциала $V(r)$, приводящего к резонансу при энергии $E = E_R$. На графике пунктиром изображена также волновая функция ψ для $E = E_R$.

Решение уравнения (XI.2) записывается в виде

$$\psi_I = ae^{ik(r-R)} + be^{-ik(r-R)} \quad \text{для } R < r, \quad (\text{XI.5})$$

$$\psi_{II} = \alpha e^{\lambda(r-R)} + \beta e^{-\lambda(r-R)} \quad \text{для } a < r < R, \quad (\text{XI.5}')$$

$$\psi_{III} = \gamma \sin kr \quad \text{для } 0 < r < a. \quad (\text{XI.5}'')$$

Сшивку этих решений на границах $r = R$ и $r = a$ приводит к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} a + b &= \alpha + \beta, \\ \frac{ik}{\lambda}(a - b) &= \alpha - \beta \end{aligned} \right\} \quad \text{для } r = a, \quad (\text{XI.6})$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha e^{-\Lambda} + \beta e^{\Lambda} &= \gamma \sin ka, \\ \alpha e^{-\Lambda} - \beta e^{\Lambda} &= \frac{k}{\lambda} \gamma \cos ka \end{aligned} \right\} \quad \text{для } r = R, \quad (\text{XI.6}')$$

где $\Lambda = \lambda(R - a) > 0$. При $\Lambda \rightarrow \infty$ ($R \rightarrow \infty$) из (XI.6) и (XI.6') имеем условие

$$D_+(k) = 1 + \frac{k}{\lambda} \operatorname{ctg} ka = 0, \quad (\text{XI.7})$$

определяющее дискретные стационарные уровни для случая бесконечно широкого барьера.

При конечной величине возникают квазистационарные резонансные уровни [28]. Для вычисления положения этих уровней перепишем систему уравнений (XI.6) и (XI.6') в виде

$$2\alpha = Aa + A^*b, \quad Ma + M^*b = \frac{1}{2} \gamma \sin ka, \quad (\text{XI.8})$$

$$2\beta = A^*a + Ab, \quad Na + N^*b = \frac{1}{2} \gamma \frac{k}{\lambda} \cos ka, \quad (\text{XI.8}')$$

где

$$A = 1 + \frac{ik}{\lambda}, \quad M = Ae^{-\Lambda} + A^*e^{\Lambda}, \quad N = Ae^{-\Lambda} - A^*e^{\Lambda}. \quad (\text{XI.9})$$

Из (XI.8) и (XI.8') имеем

$$\frac{a}{b} = \frac{A \frac{A^*}{A} e^{-2\Lambda} D_- - D_+}{A^* \frac{A^*}{A} e^{-2\Lambda} D_- + D_+}, \quad (\text{XI.10})$$

где

$$D_-(k) = 1 - \frac{k}{\lambda} \operatorname{ctg} ka. \quad (\text{XI.10}')$$

Пусть k_R — один из корней уравнения (XI.7). Тогда

$$D_+(k) = \left[\frac{dD(k)}{dk} \right]_{k=k_R} (k - k_R) + \dots, \quad (\text{XI.11})$$

$$\left[\frac{dD(k)}{dk} \right]_{k=k_R} = -\frac{1}{k_R} \Delta(k_R), \quad (\text{XI.11}')$$

где

$$\Delta(k_R) = 1 + \frac{k_R^2}{\lambda_R^2} + \frac{k_R a}{\lambda_R} \left(1 + \frac{\lambda^2}{k_R^2} \right) > 0. \quad (\text{XI.12})$$

Поэтому вблизи резонанса отношение (XI.10) принимает вид

$$\frac{a}{b} = -\frac{A}{A^*} \frac{[k - (k_R + \delta) - i\Gamma]}{[k - (k_R + \delta) + i\Gamma]}, \quad (\text{XI.13})$$

где

$$\Gamma = \text{Im} \left[\frac{A}{A^*} e^{-2\Lambda} k_R \frac{D - (k_R)}{\Delta} \right], \quad (\text{XI.14})$$

$$\delta = \text{Re} \left[\frac{A}{A^*} e^{-2\Lambda} k a \frac{D - (k_R)}{\Delta} \right]. \quad (\text{XI.15})$$

Заметим, что около резонанса амплитуда волновой функции во внутренней области γ стремится к ∞ .

Действительно, около резонанса

$$\frac{\gamma}{a} = \frac{4(A^{*2} - A^2)}{\sin k_{Ra} [M^* + N^*]} = \frac{4(A^{*2} - A^2)}{\sin k_{Ra}} 2A^* e^{\Lambda}, \quad (\text{XI.16})$$

так что при $\Lambda \rightarrow \infty$ и при $E \approx E_R$, $\gamma/a \rightarrow \infty$: частицы накапливаются внутри потенциального барьера, в области $0 < r < a$.

Решение $\psi_I(kr)$ при $r > R$ перепишем теперь в виде суперпозиции первичной s -волны $\psi_I^0 = (\sin kr)/kr$ и волны рассеянной $u = f \frac{e^{ikr}}{r}$:

$$\psi_I = \psi_I^0 + u. \quad (\text{XI.17})$$

Простое вычисление на основании формул (XI.5), (XI.9) и (XI.13) приводит к результату

$$f = \frac{e^{-2ikR}}{2ik} \frac{k - i\lambda_R}{k + i\lambda_R} \frac{k - \bar{k}_R - i\Gamma_R}{k - \bar{k}_R + i\Gamma_R}, \quad (\text{XI.18})$$

где

$$\bar{k}_R = k_R + \delta_R.$$

Матрица рассеяния S преобразующая падающую волну e^{-ikr} в волну рассеянную e^{ikr} , на основании (XI.17) и (XI.18) будет иметь вид

$$S(k) = e^{-2ikR} \frac{k - i\lambda_R}{k + i\lambda_R} \frac{k - \bar{k}_R - i\Gamma_R}{k - \bar{k}_R + i\Gamma_R}. \quad (\text{XI.19})$$

Первый множитель объединяет факторы, нарушающие причинность. Это нарушение обусловлено конечным радиусом действия потенциала $V(r)$. Второй множитель описывает резонанс около точки $k = \bar{k}_R$.

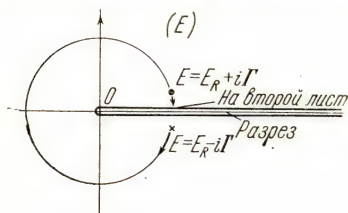
а) Аналитические свойства решения в комплексной плоскости E . Учитывая, что $k^2 = 2mE/\hbar^2$ и полагая для упрощения записи $2m/\hbar^2 = 1$, мы можем записать решение ψ_I (см. (XI.5)) в виде

$$\psi_I(kr) = a \exp[-\sqrt{V-E}(r-R)] + b \exp[\sqrt{V-E}(r-R)] \quad (XI.20)$$

и положим

$$E = \varepsilon e^{i\varphi}, \quad \varepsilon = |E|, \quad \varepsilon^{1/2} = |E^{1/2}|. \quad (XI.21)$$

Определим: на «физическом», первом листе римановой поверхности



$$\sqrt{-E} = \varepsilon^{1/2} \exp\left[\frac{1}{2}i(\varphi - \pi)\right],$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sqrt{-E} &= \\ &= \varepsilon^{1/2} \sin \frac{1}{2} \varphi \geq 0. \end{aligned} \quad (XI.22)$$

На «нефизическом», втором листе этой же поверхности определим E формулами

$$\begin{aligned} \sqrt{-E} &= \varepsilon^{1/2} e^{i(\varphi + \pi)}, \\ \operatorname{Re} \sqrt{-E} &= \\ &= -\varepsilon^{1/2} \sin \frac{1}{2} \varphi \leq 0 \end{aligned} \quad (XI.22')$$

и проведем разрез от $E=0$ до $E=+\infty$, который будет отделять эти листы друг от друга (см. рис. 52).

Волновой вектор k в соответствии с (XI.5), (XI.20)–(XI.22) определится следующим образом:

на физическом листе

$$ik = -\sqrt{-E} = +i\varepsilon^{1/2} \exp\left(i \frac{\varphi}{2}\right), \quad (XI.23)$$

$$k = \varepsilon^{1/2} \exp\left(i \frac{\varphi}{2}\right), \quad \operatorname{Im} k > 0; \quad (XI.23')$$

на нефизическом листе

$$ik = -\sqrt{-E} = -i\varepsilon^{1/2} \exp\left(i \frac{\varphi}{2}\right), \quad (XI.24)$$

$$k = -\varepsilon^{1/2} \exp\left(i \frac{\varphi}{2}\right), \quad \operatorname{Im} k < 0. \quad (XI.24')$$

Рис. 52. Комплексная плоскость (E). На рисунке показан переход из точки первого листа (крестик) в точку второго листа (жирная точка).

Таким образом, физический лист поверхности (E) отображается на верхнюю полуплоскость переменной k , а нефизический — на нижнюю полуплоскость переменной k .

Заметим, что в стационарном состоянии компонента потока, направленная по радиусу-вектору, должна равняться нулю. Поэтому

$$b(E) = a(E^*). \quad (\text{XI.25})$$

Далее, из симметрии верхней и нижней полуплоскостей (E) имеем

$$a(E^*) = a^*(E). \quad (\text{XI.26})$$

Рассмотрим сперва стабильные уровни, которые в описанном выше примере могут быть при $\Lambda = 0$ ($R \rightarrow \infty$).

На первом листе имеем

$$\psi(r, t) = [a(E) \exp(-\varepsilon^{1/2}r) + b(E) \exp(\varepsilon^{1/2}r)] \exp(-iEt). \quad (\text{XI.27})$$

Второе решение неограниченно растет при $r \rightarrow \infty$; поэтому мы должны потребовать (собственное решение уравнения (XI.2)), чтобы

$$b(E) = 0. \quad (\text{XI.28})$$

Это уравнение определяет стабильные уровни, которые определяются нулями функции на поверхности (E), лежащими на вещественной полуоси $E < 0$.

Заметим, что на втором, нефизическом листе мы имели бы при $E < 0$

$$\psi(r, t) = [a(E) \exp(\varepsilon^{1/2}r) + b(E) \exp(-\varepsilon^{1/2}r)] \exp(-iEt), \quad (\text{XI.29})$$

так что уровни определялись бы из условия

$$a(E) = 0. \quad (\text{XI.28}')$$

В силу условия (XI.25) уравнения (XI.28') и (XI.28) ведут к одному и тому же результату.

б) Нестабильные уровни. Рассмотрим возможные уровни при комплексных значениях E , когда $\text{Re } E > 0$. Потребуем опять

$$b(E) = 0. \quad (\text{XI.30})$$

Пусть

$$E = E_R - i\Gamma, \quad (\text{XI.31})$$

так что

$$\exp(-iEt) = \exp(-iE_R t - \Gamma t). \quad (\text{XI.32})$$

На физическом листе имеем

$$\begin{aligned} ik &= -\sqrt{V-E} = -\varepsilon^{1/2} \exp \left[\frac{1}{2} i (\gamma + 2\pi - \pi) \right] = \\ &= -\varepsilon^{1/2} \exp \left[\frac{1}{2} i (\gamma + \pi) \right] = -i\varepsilon^{1/2} \exp \left(i \frac{\gamma}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{XI.33})$$

где

$$\gamma = -\arctg \frac{\Gamma}{E_R} + 2\pi n, \quad n = 0, 1, \quad (\text{XI.34})$$

откуда

$$k = -k' - i\kappa', \quad (\text{XI.35})$$

$$k' = \varepsilon^{1/2} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad \kappa' = -\varepsilon^{1/2} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (\text{XI.35}')$$

так что $k' > 0$, $\kappa' < 0$.

Таким образом, функция на физическом листе имела бы вид

$$\psi(r, t) = a(E) \exp[-ik'(r-R) + \kappa'(r-R)] \exp(-iE_R t - \Gamma t). \quad (\text{XI.36})$$

Это решение противоречит уравнению непрерывности, так как $\psi(r, t)$ уменьшается с ростом r ($\kappa' < 0$) и с ростом t одновременно.

Обратимся теперь к решению на втором, нефизическом листе. В этом случае

$$ik = -\sqrt{V-E} = -i\varepsilon^{1/2} \exp \left(i \frac{\varphi}{2} \right), \quad k = -\varepsilon^{1/2} \exp \left(i \frac{\varphi}{2} \right)$$

и $\varphi = \gamma + 2\pi$, где $\gamma < 0$, так что $k = k'' + i\kappa''$,

$$k'' = \varepsilon^{1/2} \cos \frac{\gamma}{2}, \quad \kappa'' = \varepsilon^{1/2} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (\text{XI.37})$$

$$k'' > 0, \quad \kappa'' < 0, \quad (\text{XI.37}')$$

и волновая функция при $r > R$ имеет вид

$$\psi(r, t) = a(E) \exp(ik''r - \kappa''r) \exp(-iE_R t - \Gamma t). \quad (\text{XI.38})$$

Это решение растет с ростом r ($\kappa'' < 0$) и убывает с ростом t . Полагая $-\kappa' = +|\kappa''|$, получим

$$\psi(r, t) = a(E) \exp[i(k_R'' r - E_R t)] \exp(\kappa'' r - \Gamma t). \quad (\text{XI.38}')$$

Полученное решение совместимо с уравнением непрерывности и потому является правильным [138].

Этот переход с первого листа плоскости (E) на второй лист легко уясняется, если вернуться к рис. 52. Нуль $E = E_R - i\Gamma$ лежит снизу разреза $0 < E_R < +\infty$; на рис. 52 он отмечен крестиком. Оставаясь на первом листе, мы можем попасть из точки $E = E_R + i\Gamma$ в точку $E = E_R - i\Gamma$ только путем обхода разреза слева. При этом фаза волнового вектора k меняется на $e^{i\pi}$ и сходящаяся и расходящаяся волны меняются местами. Чтобы сохранить условие (XI.30) и прежнее определение расходящихся и сходящихся волн, мы должны перейти на второй, нефизический лист прямо через разрез OE .

в) Пространственно-временные свойства резонансных уровней. Зададим начальное состояние ψ_1^0 в виде локализованного волнового пакета

$$\psi_1^0 = \int c(k) \frac{\sin kr}{kr} \exp[-iE(k)t] dk, \quad (\text{XI.39})$$

сосредоточенного около значения $k = k_R^*$. Для определенности положим

$$\left. \begin{aligned} c(k) &= c \quad \text{для } k_R - \Delta < k < k_R + \Delta, \\ c(k) &= 0 \quad \text{вне этого интервала.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI.40})$$

Волновой пакет (XI.39) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \psi_1^0(r, t) &= \frac{c}{2ik_R r} \exp[i(k_R r - E_R t)] f(r - vt) - \\ &- \frac{c}{2ik_R r} \exp[-i(k_R r + E_R t)] f(r + vt), \end{aligned} \quad (\text{XI.41})$$

где функции $f(r \pm vt)$ существенно отличны от нуля вблизи

$$r \pm vt = \frac{\hbar}{\Delta}. \quad (\text{XI.42})$$

Мы возьмем $\Delta > R$. Поэтому столкновение произойдет около момента времени

$$t \approx \frac{\hbar}{\Delta v}. \quad (\text{XI.43})$$

*) Мы предполагаем, что k_R не слишком близко к нулю.

Обратимся теперь к рассеянной волне $u_s(kr, t)$. Согласно (XI.17), (XI.18) и (XI.39) она будет иметь вид

$$u_s(kr, t) = \frac{c}{2ik_R r} \int_{k_R - \Delta}^{k_R + \Delta} c(k) \exp[i(kr - Et)] g(k) \frac{k - \bar{k}_R - i\Gamma}{k - \bar{k}_R + i\Gamma} dk. \quad (\text{XI.44})$$

Заменяя здесь гладкие функции, обозначенные через $g(x)$, их значениями в точке $k = \bar{k}_R$, получим

$$u_s(kr, t) = \frac{c \exp[i(k_R r - E_R t) - \Gamma t]}{2ik_R r} g(k_R) \times \\ \times \int_{-\Delta}^{+\Delta} \exp[i(r - vt)\xi] \frac{\xi - i\Gamma}{\xi + i\Gamma} d\xi. \quad (\text{XI.44}')$$

Замкнем, считая $\Delta \rightarrow \infty$, контур интегрирования полукругом вниз, что можно сделать при $r - vt \leq 0$. Получим

$$u_s(kr, t) = \frac{2\pi i c g(k_R)}{2ik_R r} \exp[i(k_R r - E_R t)] (-2i\Gamma) \times \\ \times \exp[-i(r - vt)\Gamma] = \\ = \frac{4\pi \Gamma c g(k_R)}{2ik_R} \exp[i(k_R r - E_R t)] \exp[\Gamma(r - vt)]. \quad (\text{XI.45})$$

Если $r - vt > 0$, то мы замыкаем в верхнем полукруге и получим

$$u_s(kr, t) = 0 \quad \text{для } r - vt > 0, \quad (\text{XI.45}')$$

что совпадает с результатами § 34.

Дополнение XII (к § 35)

Соотношение унитарности для матрицы рассеяния $\hat{S} = \hat{I} + i\hat{T}$ гласит:

$$\hat{S}\hat{S}^+ = \hat{I} + i\hat{T} - i\hat{T}^+ + \hat{T}\hat{T}^+ = 1 \quad (\text{XII.1})$$

или

$$\text{Im } \hat{T} = \frac{1}{2} \hat{T} \hat{T}^+. \quad (\text{XII.2})$$

Это операторное равенство можно записать в матричной форме:

$$\operatorname{Im} T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma} T_{\alpha\gamma} T_{\alpha\beta}^+.$$

В частности, для диагонального члена $\alpha = \beta$, замечая, что $T_{\alpha\gamma} = T_{\gamma\alpha}^*$, имеем

$$\operatorname{Im} T_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma} |T_{\alpha\gamma}|^2. \quad (\text{XII.3})$$

Применим это равенство к рассеянию частиц. Тогда $T_{\alpha\alpha}$ означает амплитуду рассеяния «вперед» (т. е. рассеяние без изменения состояния частиц), а сумма членов $|T_{\alpha\gamma}|^2$ означает полную вероятность перехода из начального состояния α во все другие состояния γ . Следовательно, $\sum |T_{\alpha\gamma}|^2$ пропорциональна полному сечению σ_{α} . Более подробное вычисление приводит к результату

$$\operatorname{Im} T(0) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{\alpha}, \quad (\text{XII.4})$$

где $T(0) \equiv T_{\alpha\alpha}$, а k есть импульс частиц в системе центра масс. Равенство (XII.4) носит название *оптической теоремы*. Оно кажется логически необходимым следствием теории \hat{S} -матрицы, так как выражает сохранение вероятностей: уход частиц из начального состояния α компенсируется их возникновением в других возможных состояниях γ . Условие унитарности (XII.2) не является столь обязательным, как условие (XII.3), ведущее к оптической теореме. Однако, отказываясь от унитарности, мы теряем математические обоснования формулы (XII.3). Поэтому отказ от требования унитарности матрицы \hat{S} или противоречие с этим требованием ведут к трудно преодолимой ситуации.

Дополнение XIII (к § 37)

Для вычисления упруго рассеянных волн Ψ_{out} исходим из формулы (35.10), где функция \mathfrak{G} определена посредством функции \mathfrak{G}_0 , данной формулой (37.13). Мы начнем с рассмотрения первого случая; второй вычисляется проще.

Запишем четырехмерную δ -функцию в виде

$$\delta^4(p_4 + p_3 - p_2 - p_1) = \int d^4\alpha \exp i\alpha(p_4 + p_3 - p_2 - p_1) \quad (\text{XIII.1})$$

и функцию $\tilde{D}_c(q)$ в виде

$$\tilde{D}_c(q) = \int d^4\beta D_c(\beta) e^{i\beta q}, \quad (\text{XIII.2})$$

где $q = p_3 - p_1$ или $p_2 + p_1$. Подставляя эти выражения в (37.13), дифференцируя (37.13) по $\partial/\partial x_2^0$ и $\partial/\partial x_1^0$ и пользуясь формулой (35.10), получим

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{out}}(x_4, x_3) = & u_2(x_4) u_1(x_3) + i \int d^4\alpha d^4\beta \times \\ & \times \exp i[\alpha(p_4 + p_3 - p_2 - p_1) + p_4 x_4 + p_3 x_3 - p_2 x_2 - p_1 x_1] \times \\ & \times \{D_c(\beta) \exp[i\beta(p_3 - p_1)] + D_c(\beta) \exp[i\beta(p_2 + p_1)]\} \times \\ & \times \frac{d^3 p_4}{2p_4^0} \frac{d^3 p_3}{2p_3^0} d^3 p_1 d^3 p_2 u_2(x_2) u_1(x_1) d^3 x_2 d^3 x_1, \quad (\text{XIII.3}) \end{aligned}$$

где предположено, что первичная волна $\Psi_{\text{in}}(x_2, x_1)$ представляет собою два волновых пакета $u_2(x_2)$ и $u_1(x_1)$. Выполним сперва интегрирование по x_1 , получим

$$\int u_1(x_1) \exp(-ip_1 x_1) d^3 x_1 = \frac{\tilde{u}_1(p_1)}{2p_1^0}. \quad (\text{XIII.4})$$

Пользуясь теперь (35.4), выполняем интегрирование по p_1 и получаем

$$\int \frac{\tilde{u}_1(p_1)}{2p_1^0} \exp[-ip_1(\alpha + \beta)] d^3 p_1 = u_1(-\alpha - \beta) \quad (\text{XIII.5})$$

для первого слагаемого в фигурных скобках и

$$\int \frac{\tilde{u}_1(p_1)}{2p_1^0} \exp[-ip_1(\alpha - \beta)] d^3 p_1 = u_1(\beta - \alpha) \quad (\text{XIII.6})$$

для второго слагаемого в тех же скобках. Подобным же образом поступаем с интегрированием по x_2 и p_2 .

Наконец, интегрирование по p_3 ведет к функциям

$$\int \exp[ip_3(\alpha + \beta + x_3)] \frac{d^3 p_3}{2p_3^0} = D_+(\alpha + \beta + x_3) \quad (\text{XIII.7})$$

и

$$\int \exp[ip_3(\alpha + x_3)] \frac{d^3 p_3}{2p_3^0} = D_+(\alpha + x_3). \quad (\text{XIII.7'})$$

Так же выполняется интегрирование и по p_4 . Полагая теперь после интегрирования первого члена в фигурных скобках $\alpha = -x$, $\alpha + \beta = -y$, а после интегрирования второго члена $\alpha - \beta = -x$, $(\alpha + \beta) = -y$, получим окончательно

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{out}}(x_4, x_3) = & u_2(x_4) u_1(x_3) + \\ & + i \int d^4x d^4y D_+(x_4 - y) D_+(x_3 - x) D_c(x - y) u_1(x) u_2(y) + \\ & + i \int d^4x d^4y D_+\left(x_4 + \frac{x+y}{2}\right) D_+\left(x_3 - \frac{x+y}{2}\right) \times \\ & \times D_c\left(\frac{x-y}{2}\right) u_1(x) u_2(x). \quad (\text{XIII.8}) \end{aligned}$$

Дополнение XIV (к § 37)

Вычисление функции $\Delta^+(t-r, A, M)$ при $A \rightarrow \infty$ сводится к табличным интегралам. Действительно, положим $2m^2 = M^2$, $t-r = \varepsilon$, $x = m\varepsilon$, тогда интеграл

$$\Delta^+(\varepsilon, \infty, M) = M^2 \int_0^\infty \frac{e^{i\nu\varepsilon}}{2\nu^2 + M^2} d\nu \quad (\text{XIV.1})$$

легко приводится к виду

$$\Delta^+(\varepsilon, \infty, M) = \delta^+(\varepsilon) + m \frac{d^2}{dx^2} I(x), \quad (\text{XIV.2})$$

где

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^\infty \frac{e^{izx}}{(z^2+1)} dz = \\ &= \frac{1}{2i} \left[\int_0^\infty \frac{z+i}{z^2+1} e^{izx} dz - \int_0^\infty \frac{z-i}{z^2+1} e^{izx} dz \right] = \\ &= \frac{1}{2i} [-e^{-x} E^+ i(x) + e^x E i(-x)]. \quad (\text{XIV.3}) \end{aligned}$$

Здесь

$$E i(-x) = - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad (\text{XIV.4})$$

$$E^+ i(x) = \bar{E} i - i\pi \quad (\text{XIV.4'})$$

(эти формулы можно найти в известных таблицах *)). Асимптотические разложения этих функций имеют вид

$$Ei(-x) = -\frac{e^{-x}}{x} \left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \dots \right], \quad (\text{XIV.5})$$

$$E^+i(x) = -i\pi + \frac{e^x}{x} \left[1 + \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} + \dots \right]. \quad (\text{XIV.5'})$$

Поэтому интеграл $I(x)$ при $x \rightarrow \infty$ равен

$$I(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x} - \frac{2}{x} \left[1 - \frac{2!}{x} + \frac{1!}{x^4} - \dots \right], \quad (\text{XIV.6})$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2 I(x)}{dx^2} = \frac{\pi}{2} e^{-x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right). \quad (\text{XIV.7})$$

Отсюда на основании (XIV.2) имеем

$$\Delta^+(\varepsilon, \infty, M) = \delta^+(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{m^2 \varepsilon^3}\right) + \frac{\pi m}{2} e^{-m\varepsilon}. \quad (\text{XIV.8})$$

Напомним, что $\delta^+(\varepsilon)$ определяется формулой

$$\delta^+(\varepsilon) = \delta(\varepsilon) + \frac{1}{\pi \varepsilon} \quad (\text{XIV.9})$$

(см. (I.9)). Поэтому два последних члена в (X.9) при $m = M/\sqrt{2} \rightarrow \infty$ являются поправочными. Вспоминая значение $m = M/\sqrt{2} = 1/a\sqrt{2}$ и полагая $\varepsilon = t - r \gg a$, получим окончательно

$$\begin{aligned} \Delta^+\left(t-r, \infty, \frac{1}{a}\right) &= \\ &= \delta^+(t-r) + O\left[\frac{2a^2}{(t-r)^3}\right] + \frac{\pi}{a^2 \sqrt{2}} e^{-\frac{t-r}{a\sqrt{2}}}. \end{aligned} \quad (\text{XIV.10})$$

При $t-r \ll -a$ получается та же формула с заменой $t-r$ на $-(t-r)$. Из (XIV.1) следует, что при $t-r \rightarrow 0$ функция $\Delta^+(t-r, \infty, 1/a)$ регулярна и стремится к постоянному значению

$$\Delta^+\left(0, \infty, \frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{4} \frac{M}{\sqrt{2}}. \quad (\text{XIV.11})$$

*) Таблицы функций Е. Янке и Ф. Эмде, стр. 99, 100, Гостехиздат, 1948.

Дополнение XV (к § 43)

Уравнение (43.7) может быть выведено следующим образом*). Пусть \hat{S} -матрица в координатном представлении дана, как обычно, в виде упорядоченной по времени экспоненты:

$$\hat{S} = T \exp \left(i \int \hat{L}(x) dx \right), \quad (\text{XV.1})$$

где $\hat{L}(x)$ — лагранжиан, а T — знак упорядочения по времени (ср. дополнение VII).

Полагая

$$\hat{S} = \hat{I} + i\hat{T}, \quad (\text{XV.2})$$

из (XV.1) получаем, что

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^{s-1}}{s!} \int T(\hat{L}(x_1) \dots \hat{L}(x_s)) dx_1 \dots dx_s = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} i^{s-1} \int \theta(t_1 - t_2) \dots \theta(t_{s-1} - t_s) \hat{L}(x_1) \dots \hat{L}(x_s) \times \\ &\quad \times dx_1 \dots dx_s = \sum_{s=1}^{\infty} \hat{T}_s. \end{aligned} \quad (\text{XV.3})$$

Придадим выражению (XV.3) полностью четырехмерный вид, заменяя $\theta(t)$ инвариантными функциями $\theta(nx)$, где

$$nx = n_4 t - \mathbf{n}\mathbf{x}, \quad \text{а} \quad n^2 = 1, \quad n_4 > 0. \quad (\text{XV.4})$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} \hat{T}_s &= \sum i^{s-1} \int \theta(n, x_1 - x_2) \dots \theta(n, x_{s-1} - x_s) \times \\ &\quad \times \hat{L}(x_1) \dots \hat{L}(x_s) dx_1 \dots dx_s. \end{aligned} \quad (\text{XV.5})$$

Как известно, зависимость величин \hat{T}_s от n в (XV.5) является чисто фиктивной, так как при $(x_i - x_{i+1})^2 > 0$ всегда $\theta(t_i - t_{i+1}) = \theta(n, x_i - x_{i+1})$, а при $(x_i - x_{i+1})^2 < 0$

*) В этом дополнении мы следуем работам [139, 140].

функция $\theta(n, x_i - x_{i+1})$ не дает вклада в силу условия «локальности»

$$[\hat{L}(x_i), \hat{L}(x_{i-1})]_- = 0, \quad (\text{XV.6})$$

выполняющегося в этой области.

Положим для определенности

$$\hat{L}(x) = g : \hat{\varphi}^3 :, \quad (\text{XV.7})$$

где $\hat{\varphi}$ — скалярное поле, и произведем теперь в (XV.5) преобразование Фурье, полагая

$$\theta(n, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau(nx)}}{\tau - i\varepsilon} d\tau, \quad (\text{XV.8})$$

$$\begin{aligned} \hat{\hat{L}}(p) &= \int e^{-ipx} \hat{L}(x) dx = \\ &= \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \int \delta(p - k_1 - k_2 - k_3) : \hat{\varphi}(k_1) \hat{\varphi}(k_2) \hat{\varphi}(k_3) : dk_1 dk_2 dk_3, \end{aligned} \quad (\text{XV.9})$$

где

$$\hat{\varphi}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \int e^{-ikx} \hat{\varphi}(x) dx. \quad (\text{XV.10})$$

В результате будем иметь

$$\hat{T}_1 = \hat{\hat{L}}(0), \quad (\text{XV.11})$$

$$\hat{T}_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\hat{L}}(-n\tau) \frac{d\tau}{\tau - i\varepsilon} \hat{\hat{L}}(n\tau), \quad (\text{XV.11}')$$

.....

$$\begin{aligned} \hat{T}_s &= \frac{1}{(2\pi)^{s-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\hat{L}}(-n\tau) \frac{d\tau_1}{\tau_1 - i\varepsilon} \hat{\hat{L}}(n\tau_1 - \lambda\tau_2) \frac{d\tau_2}{\tau_2 - i\varepsilon} \dots \\ &\dots \frac{d\tau_{s-1}}{\tau_{s-1} - i\varepsilon} \hat{\hat{L}}(n\tau_{s-1}). \end{aligned} \quad (\text{XV.11}'')$$

Выражения (XV.11) можно рассматривать как последовательные итерации некоторого линейного интегрального уравнения

$$\hat{R}(n\tau) = \hat{\hat{L}}(n\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\hat{L}}(n\delta - n\tau') \frac{d\tau'}{\tau' - i\varepsilon} \hat{R}(n\tau') \quad (\text{XV.12})$$

при условии, что

$$\hat{T} = \sum_{s=1}^{\infty} \hat{T}_s = \hat{R}(0). \quad (\text{XV.13})$$

Уравнение (XV.12) является инвариантным уравнением движения для матрицы рассеяния в p -представлении.

Покажем, например, пользуясь уравнением (XV.12), унитарность матрицы \hat{S} . Для этого перепишем (XV.12) в виде

$$\hat{R}(n\tau) = \hat{L}(n\tau) + \int \hat{L}(n\tau') \hat{F}(\tau - \tau') d\tau', \quad (\text{XV.14})$$

где

$$\hat{F}(\tau - \tau') = \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{R}(n\tau - n\tau')}{\tau - \tau' - i\varepsilon}. \quad (\text{XV.15})$$

Учитывая, что при эрмитовом сопряжении

$$\hat{L}^+(n\tau) = \hat{L}(-n\tau), \quad (\text{XV.16})$$

уравнение, сопряженное (XV.14), можно записать так

$$\hat{R}^+(-n\tau) = \hat{L}(n\tau) + \int \hat{F}^+(\tau' - \tau) \hat{L}(n\tau') d\tau', \quad (\text{XV.17})$$

причем

$$\hat{F}^+(\tau' - \tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{R}^+(\tau' - \tau)}{\tau' - \tau + i\varepsilon}. \quad (\text{XV.18})$$

Из (XV.14) и (XV.17) следует равенство

$$\begin{aligned} \hat{R}(n\tau) - \hat{R}^+(-n\tau) &= \\ &= \int \hat{L}(n\tau') \hat{F}(\tau - \tau') d\tau' - \int \hat{F}^+(\tau' - \tau) \hat{L}(n\tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (\text{XV.19})$$

С другой стороны, с помощью тех же уравнений после простых преобразований можно показать, что

$$\begin{aligned} \int \hat{R}^+(-n\tau') \hat{F}(\tau - \tau') d\tau' - \int \hat{F}^+(\tau' - \tau) \hat{R}(n\tau') d\tau' &= \\ &= \int \hat{L}(n\tau') \hat{F}(\tau - \tau') d\tau' - \\ &- \int \hat{F}^+(\tau' - \tau) \hat{L}(n\tau) d\tau' + \hat{\Phi}_1(\tau) - \hat{\Phi}_2(\tau), \end{aligned} \quad (\text{XV.20})$$

где

$$\hat{\Phi}_1(\tau) = \int \hat{F}^+(\tau' - \tau'') \hat{L}(n\tau') \hat{F}(\tau - \tau'') d\tau' d\tau'', \quad (\text{XV.21})$$

$$\hat{\Phi}_2(\tau) = \int \hat{F}^+(\tau'' - \tau) \hat{L}(n\tau') \hat{F}(\tau'' - \tau') d\tau' d\tau''. \quad (\text{XV.21}')$$

Произведем теперь в (XV.21) последовательные замены переменных интегрирования:

$$\tau' - \tau'' \rightarrow \xi, \quad \tau' - \tau'' \rightarrow \eta \quad \text{в} \quad \hat{\Phi}_1(\tau), \quad (\text{XV.22})$$

$$\tau'' - \tau \rightarrow \eta, \quad \tau'' - \tau \rightarrow \xi \quad \text{в} \quad \hat{\Phi}_2(\tau). \quad (\text{XV.22}')$$

В результате получим

$$\hat{\Phi}_1(\tau) = \hat{\Phi}_2(\tau) = \int \hat{F}^+(\xi) \hat{L}(n, \tau + \xi - \eta) \hat{F}(\eta) d\xi d\eta. \quad (\text{XV.23})$$

Теперь из (XV.19) и (XV.20) с учетом (XV.23), вытекает, что

$$\begin{aligned} \hat{R}(n\tau) - \hat{R}^+(-n\tau) = \\ = \int [\hat{R}^+(-n\tau) \hat{F}(\tau - \tau') - \hat{F}^+(\tau' - \tau) \hat{R}(n\tau')] d\tau', \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \hat{R}(n\tau) - \hat{R}^+(-n\tau) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\tau'}{\tau' - i\varepsilon} [\hat{R}^+(-n\tau') \hat{R}(n\tau - n\tau') + \hat{R}^+(n\tau' - n\tau) \hat{R}(n\tau')]. \end{aligned} \quad (\text{XV.24})$$

Полагая в (XV.24) $\tau = 0$ и используя формулу

$$\frac{1}{\tau - i\varepsilon} = P \frac{1}{\tau} + i\pi \delta(\tau), \quad (\text{XV.25})$$

будем иметь

$$\hat{R}(0) - \hat{R}^+(0) = i\hat{R}^+(0) \hat{R}(0), \quad (\text{XV.26})$$

т. е. условие унитарности матрицы $\hat{S} = 1 + i\hat{R}(0)$. Соотношение (XV.24) можно рассматривать как условие унитарности \hat{S} -матрицы при $\tau \neq 0$.

Дополнение XVI (к § 47)

Согласно формулам (38.14') и (38.14'') добавочные члены Ψ_1 и Ψ_2 имеют вид

$$\Psi_1 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{M^2 + \omega_0^2} \tilde{\rho}(\omega) d_1(iM), \quad (\text{XVI.1})$$

$$\Psi_2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{M^2 + \omega_0^2} \tilde{\rho}(\omega) d_2(iM). \quad (\text{XVI.1}')$$

Формулы в этом виде непригодны для сранения с опытом, так как действительная d и мнимая a части функции N взяты в формулах в точке $\omega = iM$.

Для оценки функций Ψ_1 и Ψ_2 можно воспользоваться аналитичностью амплитуды в угле от 0° до 90° и большой величиной M . Для этого рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{T(z)}{z} = \frac{\tilde{\rho}(z) N(z)}{z}, \quad (\text{XVI.2})$$

где

$$\tilde{\rho}(z) = \frac{M^2}{z^2 + M^2}. \quad (\text{XVI.3})$$

Функция $f(z)$ на действительной оси при $z = \omega \rightarrow +\infty$ стремится к постоянному пределу, который мы обозначим через $i\alpha$. Это предположение эквивалентно предположению о постоянстве полных асимптотических сечений σ_\pm . В частности, согласно оптической теореме (см. (XII.4))

$$\text{Re} \alpha_\pm = \frac{\sigma_\pm}{4\pi}. \quad (\text{XVI.4})$$

Из (XVI.2) и (XVI.3) при $|z| = V$, $V \rightarrow +\infty$ на основании теоремы Линделёфа [63] имеем

$$f(V) = \frac{\tilde{\rho}(V) N(V)}{V} \approx \frac{N(V)}{V^3} = i\alpha \quad (\text{XVI.5})$$

и для $z = +iV$

$$f(iV) = \frac{N(iV)}{(iV)^3} = i\alpha. \quad (\text{XVI.6})$$

Отсюда

$$N(iV) = (i)^3 N(V) = -iN(V). \quad (\text{XVI.7})$$

Поэтому

$$d(iV) = \operatorname{Re} N(iV) = +a(V), \quad (\text{XVI.8})$$

$$a(iV) = \operatorname{Im} N(iV) = -d(V) \quad (\text{XVI.8'})$$

при большом V . Если характерная частота M настолько велика, что при $V=M$ уже достигается асимптотическое значение функции $f(z)$, то можно положить

$$d(iM) = a(M), \quad (\text{XVI.9})$$

$$a(iM) = d(M), \quad (\text{XVI.9'})$$

или, имея в виду, что $\bar{\rho}(M) = 1/2$, получим

$$\frac{1}{2} d(iM) = A(M), \quad (\text{XVI.10})$$

$$\frac{1}{2} a(iM) = -D(M). \quad (\text{XVI.10'})$$

Поэтому формулы (38.13) и (38.13') можно переписать в виде

$$\Psi_1(\omega) = \frac{\omega^2 - m^2}{M^2 + m^2} \tilde{\rho}(\omega) [A_+^0(M) + A_-^0(M)], \quad (\text{XVI.11})$$

$$\Psi_2(\omega) = -\frac{\omega^2 - m^2}{M^2 + m^2} \tilde{\rho}(\omega) \frac{\omega}{M} [D_+^0(M) + D_-^0(M)], \quad (\text{XVI.11'})$$

или, выражая амплитуды A_{\pm}^0 через полное сечение $A_{\pm}^0(M) = \frac{k(M)}{4\pi} \sigma_{\pm}(M)$, получим

$$\Psi_1(\omega) = \frac{\omega^2 - m^2}{4\pi \sqrt{M + m^2}} \tilde{\rho}(\omega) [\sigma_+(M) + \sigma_-(M)]. \quad (\text{XVI.12})$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Эйнштейн А.* Геометрия и опыт.— Л., 1923.
2. *Эйнштейн А.*— В кн.: Принцип относительности: К электродинамике движущихся тел, М.: ОНТИ, 1935.
3. *Минковский Г.*— В кн.: Принцип относительности: Пространство и время, М.: ОНТИ, 1935.
4. *Клейн Ф.*— В кн.: Об основаниях геометрии: Эрлангенская программа, М.: Гостехиздат, 1956.
5. Гравитация и относительность.— М.: Мир, 1965.
6. *Синг Дж.* Общая теория относительности.— М.: ИЛ, 1963.
7. *Ньютон И.* В кн.: Крылов А. Н.— М.: Изд. АН СССР, 1936, т. VII/Математические начала натуральной философии.
8. *Гельмгольц Г.*— В кн.: Об основаниях геометрии: О фактах, лежащих в основании геометрии, М.: Гостехиздат, 1956.
9. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики.— М.: Физматгиз, 1958, т. IV, т. 91.
10. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны.— М.: ИЛ, 1950.
11. *Блохинцев Д. И.* Метрика пространства времени.— Дубна: Препринт ОИЯИ, Р-2152, 1965.
12. *Петров А. З.* Пространства Эйнштейна.— М.: Физматгиз, 1961.
13. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения.— М.: Гостехиздат, 1955.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М.: Наука, 1967.
15. *Риман Б.*— В кн.: Об основаниях геометрии: О гипотезах, лежащих в основе геометрии.— М.: Гостехиздат, 1956.
16. *Вейль Г.*— В кн.: Об основаниях геометрии: Комментарий к ст. Б. Римана— М.: Гостехиздат, 1956.
17. *Weyl H.* Raum, Zeit und Materie.— Berlin, 1918.
18. *Марцке Р., Циллер Д.*— В кн.: Гравитация и относительность, М.: Мир, 1965.
19. *Born M.*— Proc. Roy. Soc., 1934, v. A143, p. 410.
20. *Born M., Infeld L.*— Proc. Roy. Soc., 1934, v. A144, p. 425.
21. *Блохинцев Д. И.*— ДАН СССР, 1952, т. 82, с. 553.
22. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики.— М.: Физматгиз, 1958, т. IV, с. 311.
23. *Карман Т.* Сверхзвуковая аэродинамика.— М.: ИЛ, 1968.
24. *Блохинцев Д. И.*— Атомная энергия, 1963, т. 14, с. 105.
25. *Блохинцев Д. И., Орлов В. И.*— ЖЭТФ, 1953, т. 25, с. 513.
26. *Паули В.* Теория относительности.— М.: Гостехиздат, 1947.
27. *Дю Моид.*— УФН, 1961, т. 73, вып. 4, с. 333.

28. Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики.— М.: Высшая школа, 1963.
29. Блохинцев Д. И. Принципиальные вопросы квантовой механики.— М.: Наука, 1966.
30. Блохинцев Д. И.— В кн.: Физика высоких энергий и теория элементарных частиц: О локализации частиц.— Киев: Наукова Думка, 1967.
31. Паули В. Общие принципы волновой механики.— М.: Гостехиздат, 1947.
32. Широков М. И. Препринт ОИЯИ Е-2478—Дубна, 1965.
33. Мандельштам Л. М. Собрание сочинений.— М.: Изд. АН СССР, 1950, т. III, с. 397.
34. Мандельштам Л. И. Собрание сочинений.— М.: Изд. АН СССР, 1950, т. V, с. 347.
35. Мотт И., Мэсси Г. Теория атомных столкновений.— М.: ИЛ, 1951.
36. Фейнман Р. Вопросы причинности в квантовой механике.— М.: ИЛ, 1955.
37. Ахиезер А. И., Берестецкий Б. В. Квантовая электродинамика.— М.: Физматгиз, 1959.
38. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей.— М.: Гостехиздат, 1957.
39. Newton T., Wigner E. Rev. Mod. Phys., 1949, v. 21, p. 400.
40. Хофштадтер Р. Электромагнитная структура нуклонов.— М.: ИЛ, 1962.
41. Дрелл С. Г., Закариадзен Ф. Электромагнитная структура нуклонов.— М.: ИЛ, 1962.
42. Блохинцев Д. И., Барашенков В. С., Барбашев Б. М.— УФН, 1959, т. 68, с. 417.
43. Chew K. W. et al. XII Международная конференция по физике высоких энергий в Дубне.— М.: Атомиздат, 1964, т. I, с. 861.
44. Окунь Л. Б. Слабые взаимодействия элементарных частиц.— М.: Физматгиз, 1963.
45. Blokhintsev D., Barachenkov V., Grishin V.— Nuovo Cimento, 1958, v. 9, p. 249.
46. Блохинцев Д. И.— ДАН СССР, 1946, т. 53, с. 205.
47. Blokhintsev D.— Nuovo Cimento, ser. X, 1964, v. 33, p. 1094.
48. Логунов А. А. и др. Препринт ОИЯИ, Д-1191.— Дубна, 1962, Nuovo Cimento, 1963, v. 30.
49. Пузиков Л. Д., Рыдин Р. М., Смородинский Я. А.— ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 592.
50. Blokhintsev D.— Nuclear Physics, 1962, v. 31, p. 628.
51. Блохинцев Д. И.— УФН, 1959, т. 69, вып. 3.
52. Fierz M.— Helv. Phys. Acta, 1950, v. 23, p. 731.
53. Stuekelberg E., Rivier D.— Helv. Phys. Acta, 1949, v. 22, p. 215.
54. Блохинцев Д. И.— В кн.: Пространство, время, причинность. Препринт ОИЯИ, Д-1735.— Дубна, 1964.
55. Bloch F.— Sov. Phys., 1943, v. 5, p. 301.
56. Мейер А. А. Дипломная работа.— Физ. фак. МГУ, 1945.
57. Kronig R.— J. Amer. Opt. Soc., 1926, v. 12, p. 547.
58. Kramers H. A.— Atti Congr. Inst. Fisici Como, 1927, v. 2, p. 545.
59. Goldberger M. L.— Phys. Rev., 1955, v. 97, p. 508.

60. *Symanzik K., Jost D.* Reports of the Conference in Siatle, 1956.
61. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений.— М.: Физматгиз, 1958.
62. Померанчук И. Я.— ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 725.
63. Нейман Н. Н. В кн.: Вопросы физики элементарных частиц.— Ереван, 1962.
64. Логунов А. А., Тодоров И., Нгуен Ван Хьеу—УФН, 1966, т. 88, вып. I.
65. Черников Н. А. Препринт ОИЯИ, Р-723.— Дубна, 1961.
66. Смородинский Я. А.— Препринт ОИЯИ, Р-11Р9.— Дубна, 1962; Fortschr. d. Phys. 1965, Bd. 113, Hf. 4.
67. *Rosenfeld A. H. et al.* Preprint JINR, R1-3129, 1967.
68. Широков Ю. М.— ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 861.
69. *Blokhintsev D. I., Kolerov G. I.*— Nuovo Cimento, Ser. X, 1966, v. 44, p. 974.
70. *Blokhintsev D. I., Kolerov G. I.*— Nuovo Cimento Macroscopic Causality.— Centre Theor. Phys. Trieste, 1C/67/36, 1967.
71. *Blokhintsev D.*— Acta Phys. Acad. Sci. Hung., 1967, v. 22, p. 307.
72. *Blokhintsev D. I., Kolerov G. I.*— Nuovo Cimento, Ser. X, 1964, v. 34, p. 163.
73. Блохинцев Д. И., Виноградов В. М. Препринт ОИЯИ, Р2-3506.— Дубна, 1967.
74. Блохинцев Д. И.— Ученые записки МГУ, сер. Физика, 1945, книга III, вып. 77, с. 101.
75. Блохинцев Д. И.— ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 480.
76. *Blokhintsev D.*— J. Phys. USSR, 1946, v. 10, p. 167.
77. Блохинцев Д. И.— ЖЭТФ, 1947, т. 17, с. 266.
78. Нейман Н. Н.— ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 1966.
79. Ефимов Г. В. Препринт ОИФИ, Р2-3390.— Дубна, 1967.
80. Блохинцев Д. И.— ЖЭТФ, 1947, т. 17, с. 116.
81. *Blokhintsev D.*— J. Phys. USSR, 1940, v. 2, p. 453.
82. *Watagin G.*— Zs. Phys., 1934, v. 88, p. 92.
83. *Markov M. A.*— J. Phys. USSR, 1940, v. 2, p. 433.
84. Блохинцев Д. И.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, с. 566.
85. Блохинцев Д. И.— ЖЭТФ, 1951, т. 22, с. 254.
86. *Menger K.*— Proc. Nat. Acad. Soc. USA, 1951, v. 37, p. 226.
87. *Schweiser B., Selar A.*— Pacific J. Math., 1960, v. 10, p. 313.
88. *March A.*— Zs. Phys., 1934, v. 104, p. 93; 1937, v. 105, p. 620.
89. Марков М. А. Гипероны и К-мезоны.— М.: Физматгиз, 1964.
90. *Ingraham R. I.*— Nuovo Cimento, Ser. X. 1964, v. 34, p. 182.
91. *Ingraham R. I.* Renormalization Theory of Quantum Field with a Cut-off.— N. Y.: Gordon et Beach, 1967.
92. *Tikawa H.* Research Inst. Fund. Phys. Kyoto Univers., RiFP-55, 1966.
93. Широков Ю. М.— ЖЭТФ, 1951, т. 21, с. 748.
94. *Ambarzumian V., Ivanenko D.*— Zs. Phys., 1930, v. 64, p. 563.
95. *Darling B.*— Phys. Rev., 1950, v. 80, p. 460; 1953, v. 91, p. 1252.
96. *Das. A.*— Nuovo Cimento, 1960, v. 18, p. 482.
97. Вяльцев А. Н.— Дискретное пространство— время.— М.: Наука, 1965.
98. *Snyder H.*— Phys. Rev., 1947, v. 71, p. 38.
99. Гольфанд Н. А.— ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 504.

100. *Кадышевский В. Г.* — ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 1885; ДАН СССР, 1962, т. 147, с. 588.
101. *Гольфанд Н. А.* — ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 256; 1963, т. 44, с. 1248.
102. *Кадышевский В. Г.* — ДАН СССР, 1962, т. 147, с. 1336.
103. *Тамм И. Е.* XII Международная Конференция по физике высоких энергий в Дубне. — М.: Атомиздат, 1964, т. II, с. 229; Proc. of Int. Conf. on Element. Part. — Kyoto, 1965, p. 314.
104. *Кадышевский В. Г.* — В кн.: Пространство, время, причинность. Препринт ОИЯИ Д-1735. — Дубна, 1964.
105. *Blokhintsev D.* — Phys. Letts., 1964, v. 12, p. 272.
106. *Blokhintsev D.* — Nuovo Cimento, 1960, v. 16, p. 382.
107. *Марков М. А.* Препринт ОИЯИ, Е2-2973. — Дубна, 1966.
108. *Барбашев Б. М., Черников Н. А.* Препринт ОИЯИ, Р-2151. — Дубна, 1965.
109. *Барбашев Б. М., Черников Н. А.* — ЖЭТФ, 1966, т. 50, вып. 5.
110. *фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. — М.: Наука, 1967.
111. *Barashenkov V. S.* — Fortschr. Phys., 1962, v. 10, p. 205.
112. *Barashenkov V. S., Dedyu V. I.* — Nucl. Phys., 1966, v. 64, p. 636.
113. *Hohler G., Ebel G., Giesiche I.* — Zs. Phys., 1964, v. 108, p. 430.
114. *Foley K. J. et al.* — Phys. Rev. Letts., 1963, v. 11, p. 425.
115. *Kirillova L. et al.* — Phys. Letts., 1964, v. 13, p. 93.
116. *Никитин В. А.* и др. Школа физиков в Ереване, 1965.
117. *Gabraith W. et al.* XII Международная конференция по физике высоких энергий в Дубне. — М.: Атомиздат, 1964, т. I, с. 109.
118. *Lindenbaum S. I.* XII Международная конференция по физике высоких энергий в Дубне. — М.: Атомиздат, 1964, т. I, с. 188.
119. *de Pagter I. et al.* — Phys. Rev. Letts, 1964, v. 12, p. 739.
120. *de Pagter I. et al.* — Proc. Int. Sump. on Electron and Photon Interactions, 1965, v. 11, p. 360.
121. *Drell S. D.* Раппортерский доклад, Proc. XIII Int. Conf. on High Energy Physics. — Berkeley, 1967, p. 85.
122. *Drell S. D.* — Ann. Phys., 1958, v. 4, p. 75.
123. *Christensen I. H., Cronin I. W., Fitch V. L., Tarlay R.* XII Международная конференция по физике высоких энергий в Дубне. — М.: Атомиздат, 1964, т. II, с. 105.
124. *Терентьев М. В.* — УФН, 1965, т. 86, вып. 2, с. 231.
125. *Dorfman D. et al.* — Phys. Rev. Letts, 1967, v. 19, p. 987.
126. *Bennet S. et al.* — Phys. Rev. Letts, 1967, v. 19, p. 993.
127. *Feynman R.* — Phys. Rev., 1949, v. 76, p. 749 (см. пер. в кн.: Новейшее развитие квантовой электродинамики, М.: ИЛ, 1954).
128. *Паули В.* — В кн.: Нильс Бор и развитие физики, М.: ИЛ, 1958.
129. *Tost R.* — Helv. Phys. Acta, 1957, v. 30, p. 409.
130. *Блохинцев Д. И.* — ЖЭТФ, 1947, т. 17, с. 924.
131. *Шапиро И. С.* — УФН, 1957, т. 61, с. 313.
132. *Арбузов Б. А., Филиппов А. Т.* Препринт ОИЯИ, Р2-2578. — Дубна, 1966.
133. *Арбузов Б. А., Филиппов А. Т.* Препринт ОИЯИ, Р2-3067. — Дубна, 1966.
134. *Christensen I. H. et al.* — Phys. Rev. Letts, 1964, v. 13, p. 138.
135. *Bonard X. D. et al.* — Phys. Rev. Letts, 1965, v. 15, p. 58.
136. *Никитин В. А.* и др. — ПТЭ, 1963, № 6, с. 18.

137. *Blokhintsev D. I.*—Comp. Rendus USSR (Doklady), 1946, t. 53, № 3.
138. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.*, Квантовая механика.—М.: Физматгиз, 1963.
139. *Кадышевский В. Г.* Препринт ОИЯИ, Р-1327,—Дубна, 1963.
140. *Кадышевский В. Г.* Препринт ОИЯИ, Р-1328,—Дубна, 1967.
141. *Сморodinский А. Я.*—УФН. т. 39, с. 325.
142. *Иваненко Д. Д.*—В кн.: Сдвиг уровней атомных электронов.—М.: ИЛ, 1950.
143. *Panovsky W.* Electromagnetic Interactions Proc. XIV Conf. on High Energy Physics.—CERN, 1968, p. 23.
144. *Blokhintsev D.*—Nuovo Cimento, Ser. X, 1958, v. 9, p. 925.
145. *Blokhintsev D.* Proc. Berkeley Conf. on Instrumentation.—Berkeley, 1960, p. 198.
146. *Blokhintsev D.*—Fortschr. Phys., 1969.
147. *Cronin I. W.* Proc. XIV Int. Conf. on High Energy Physics.—CERN, 1968, p. 300.
148. *Höhler G., Kaiser F.* Review and Tables of Pion-Nucleon Forward Amplitudes. Preprint KfK 3027.—Karlsruhe, 1980.
149. *Ankenbrandt C. et al.* Preprint Fermilab. Pub. 80/27—exp., 1980.
150. *Brach E. et al.* Preprints CERN/HERA, 72—1,2. 1972; 73—1, 1973.
151. *Carol A. S. et al.* Preprint Fermilab., Pub. 75. Exp.—7100—104, 1975.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Блох** 160, 168
Блохинцев 231, 238, 272
Боголюбов 163, 173, 174
Борн 42, 46, 275
Брейт 230, 232
- Ватагин** 239
Вейль 37, 38
Вигнер 92, 100, 101
- Гейзенберг** 143, 147, 210
Гельмгольц 33
Гильберт 157, 185
Гольдбергер 173
Гордон 102
Грин 26, 75, 134, 137, 138, 140—
142, 146, 150, 219, 221, 236—
239, 241, 301, 312
- Дирак** 78—80, 83, 101, 103, 112,
121, 122, 256, 305, 308
- Инфельд** 42, 275
- Киллинг** 35
Клейн 24, 37, 43, 86, 102, 103, 134,
215
Колеров 231
Коши 56, 170, 172, 177, 276
Крамерс 169
Кристоффель 30
Крониг 169
- Ланде** 290, 299
Лобачевский 57, 184, 185, 188,
197, 198, 215, 224
- Мандельштам** 62
Марков 239
Марцке 38
Минковский 236, 240, 242, 244, 269
- Ньютон Т.** 98, 100, 101
- Риман** 32—34, 36, 47
- Симанчик** 173
Снайдер 261
- Томонага** 159, 161, 162, 263
- Фейнман** 106, 110, 126, 129, 199,
226, 263, 266, 291, 308
Ферми 80, 146
- Хофштадтер** 114
- Швингер** 159, 161, 162, 263
Шредингер 57, 60, 94, 122, 162,
163, 168
Штюкельберг 163
- Эйнштейн** 36, 46, 48, 236, 240,
242, 244, 254, 269, 270

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютное будущее** 19
— прошедшее 19
Асимптотические состояния 183, 184, 197
- Борновское приближение** 103
- Вектор внешний** 243, 269, 282, 294
— внутренний 243, 282
Волновая зона 195, 217
Волновой функционал 158, 159, 164
— —, нормировка 158, 159
Временная область 20, 48
Временной интервал 48
- Геодезическая линия** 31
Гипотеза Римана 32, 33
- Диаграммы Фейнмана** 106, 110, 117, 126, 199, 202, 226, 267
Дисперсионные соотношения 170, 172, 174, 180
Дифференциальное сечение упругого рассеяния 118
- Задача Коши** 56, 256
Закон Гука 17
— сохранения заряда 140
Запаздывающая функция; фермионное поле 302
- Инвариант** 32, 44, 124, 159, 188
- Интервал** 32, 39, 40, 144
— временной 40
— пространственный 41
- Калибровка системы** 40, 50
Квазипотенциальное уравнение 312
Ковариантная производная 30
Ковариантный вектор 29
— тензор 29
Комбинированная четность 291
«Комок» событий 44
Контравариантный вектор 29
— тензор 29, 34
Косвенное измерение 62, 73, 103
Коэффициенты аффинной связности, см. Символы Кристоффеля
- Локализация частиц, полей** 59, 65, 70, 83, 86, 95, 101, 117, 128, 148, 153
Локальная акаузальность 217, 284
Локальности требования 167, 220
- Матрица амплитуды рассеяния** 162
— — —, унитарность 163
— рассеяния 102, 127, 162 и д.
— —, локальность 167
— —, почти локальность 234
— —, релятивистская инвариантность 168, 186
— —, трансляционная инвариантность 187
— —, унитарность 162, 183, 217, 229, 330, 337

- Матрицы Дирака 78, 112
 Мезонная атмосфера нуклона 120
 Метрическая геометрия 32
 Метрический тензор 32, 34
 Мировая линия 39
- Обобщенное взаимодействие 238
 Общее преобразование координат 28, 47
 Оператор Дирака 121
 — координаты Ньютона — Вигнера 98
 Опережающая функция, фермионное поле 302
 Оптическая теорема 123, 163, 179, 331
- Параметр удара 124
 Перекрестная симметрия 190
 Плотность действия 139
 Полный опыт 124
 Поляризация вакуума 107
 Правила коммутации, бозонное поле 87
 — —, векторное поле 144
 — — операторов 55
 — —, скалярное действительное поле 143
 — —, — комплексное поле 143
 — —, спинорное поле 144
 — —, фермионное поле 78
 — —, электромагнитное поле 92
 Представление взаимодействия 159, 162
 Преобразование Лоренца 42, 146, 168, 186
 Причинная функция 146, 150, 226
 — —, фермионное поле 302
 Причинность макроскопическая 215, 216, 224, 227, 229
 — микроскопическая 144, 212, 222
 — —, минимальное нарушение 231
 —, принцип 158, 160, 171
 Пространственная область 20
 Пространственные решетки 27
 Пространство асимптотических состояний 185, 199, 283
 — Гильберта 185
 — конечных состояний 185
- Пространство Лобачевского 57, 184, 212, 224
 — начальных состояний 185
 — псевдоевклидово 33, 47, 50
 — Снайдера 261, 263
 — стохастическое 251
 — Эйнштейна — Минковского 236, 242, 269
 Прямое измерение 61, 101, 102
- Резонансы 203, 210
 «Резононы» 203, 210
 Риманова геометрия 32
- Свертка 314
 Сигнал 20, 23, 25, 37, 49, 147
 Сигнатура метрики 32, 41
 Символы Кристоффеля 30
 Система Брэйта 230
 Слабый разрыв производной 20, 43
 Событие 14, 244, 252
 Соотношение неопределенностей 143, 147
 Средний квадратичный радиус нуклона, магнитный 114
 — — —, электрический 113
- Тензор кривизны многообразия, см. Тензор Римана
 — Римана 32
 — энергии-импульса поля 93
 Теорема Коши 170, 172, 177
 — Линделёфа 339
 — Стокса 31
 Точечность частицы 105
 Требование локальности 168
 Т-произведение 145, 161, 167
- Уравнение Борна — Инфельда 275
 — геометрической оптики 21
 — Даламбера 91
 — Дирака 83, 103, 112, 256, 305
 — — релятивистское 57, 78
 — Клейна 24, 43, 86, 103, 215
 — Томонага — Швингера 159, 162
 — Шредингера 57, 60, 68, 94, 122
 — Эйнштейна 46, 48, 170
 Уравнения Киллинга 35
 Условие Блоха 160, 168
 — локальной акаузальности 217

- Условия локальной коммутации 144, 212, 222
— симметрии амплитуды 231
— спектральности амплитуды 231
- Физическое поле 238
Фокус события 245, 247
Формфактор 109, 111, 114, 151
Функция Грина 26, 69, 75, 135, 236
— — запаздывающая 135, 138, 219, 301
- Функция Грина опережающая 136, 221, 301
— Лагранжа 42
- Характеристический конус 22
Хроногеометрия 41, 50
- Эффективный заряд 107
— потенциал мезон-нуклонного взаимодействия 133

Дмитрий Иванович Блохинцев

Пространство и время в микромире

Редакторы *М. К. Волков, Т. Г. Корышева*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *Л. И. Назарова*

ИБ № 11975

Сдано в набор 12.02.82. Подписано к печати 28.07.82. Т-11167. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 18,48. Уч.-изд. л. 17,83. Тираж 10 000 экз. Заказ № 31. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28.

Отпечатано в типографии № 2 изд-ва «Наука»,
Заказ 1921 Москва, Шубинский пер., 10.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

*ГОТОВИТСЯ К ИЗДАНИЮ
В 1982 ГОДУ:*

Каталог книг Главной редакции физико-математической литературы издательства «Наука», вышедших в 1965—1980 гг. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы.

Каталог содержит полный перечень библиографических описаний книг, выпущенных Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука» за 16 лет (1965—1980). Материал систематизирован по тематическому принципу (литература по математике, физике, механике и процессам управления и астрономии). В отдельный раздел выделена «Библиотечка «Квант». В большинстве случаев раскрывается содержание описываемых книг, приводятся учебные грифы или перечисляются параграфы и главы. Для удобства пользования каталогом он снабжен именным указателем авторов, титульных редакторов и переводчиков.

Для научных работников, инженеров и преподавателей, пользующихся физико-математической литературой, а также специалистов, работающих в органах научно-технической информации, библиотечных и книготорговых работников.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

ГОТОВИТСЯ К ПЕЧАТИ:

Паули В. Теория относительности: Пер. с англ.— 2-е изд.
испр. / Под ред. В. Л. Гинзбурга и В. П. Фролова.

Книга написана известным физиком-теоретиком и является классической книгой по теории относительности. Она включает основы и систематическое построение специальной теории относительности. Кроме того, она содержит общую теорию относительности, а также рассмотрение теорий о природе заряженных элементарных частиц.

Предыдущее издание выходило в 1947 г.

Для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, интересующихся вопросами теоретической физики.



ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ
ՆԱԽԱՐԱՐԱՆԻ ԲԱՆԿ